

**Problemas sugeridos do livro.**

- (a) Capítulo 1: 1–3, 6–7, 10, 12–13, 17, 19, 21–22.
- (b) Capítulo 2: 1–21.
- (c) Capítulo 3: 1–19.

**Problema 1.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Prove as seguintes equivalências:

- (a)  $f$  é contínua;
- (b) para todo conjunto  $A \subseteq X$ ,  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .
- (c) para todo conjunto  $B \subseteq Y$ ,  $f^{-1}(\text{int}(B)) \subseteq \text{int}(f^{-1}(B))$ .

**Problema 2.** Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow Y$  entre dois espaços topológicos é *aberta* se para todo conjunto aberto  $A \subseteq X$ ,  $f(A)$  é aberto em  $Y$ . Prove que  $f$  é uma função aberta se, e somente se, para todo conjunto  $B \subseteq Y$ ,  $\text{int}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\text{int}(B))$ .

**Problema 3.** Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow Y$  entre dois espaços topológicos é *fechada* se para todo conjunto fechado  $F \subseteq X$ ,  $f(F)$  é fechado em  $Y$ . Prove que  $f$  é uma função fechada se, e somente se, para todo conjunto  $A \subseteq X$ ,  $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ .

**Problema 4.** Suponha que  $X$  é um espaço topológico e que para todo  $p \in X$ , existe uma função contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f^{-1}(\{0\}) = \{p\}$ . Mostre que  $X$  é um espaço de Hausdorff.

**Problema 5.** Para cada uma das seguintes propriedades, dê um exemplo consistindo de dois subconjuntos  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ , ambos considerados como espaços topológicos com suas topologias induzidas por  $\mathbb{R}^2$ , juntamente com uma função  $f : X \rightarrow Y$  que tenha a propriedade indicada.

- (a)  $f$  é aberta, mas não é fechada nem contínua.
- (b)  $f$  é fechada, mas não é aberta nem contínua.
- (c)  $f$  é contínua, mas não é aberta nem fechada.
- (d)  $f$  é contínua e aberta, mas não é fechada.
- (e)  $f$  é contínua e fechada, mas não é aberta.
- (f)  $f$  é aberta e fechada, mas não é contínua.

**Problema 6.** Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas de  $X$  em  $Y$ , onde  $Y$  é um espaço de Hausdorff. Mostre que o conjunto  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  é fechado em  $X$ . Dê um contraexemplo se  $Y$  não for um espaço de Hausdorff.

**Problema 7.** Dados números reais  $a, b$  e  $c$ , seja  $I_c(a, b) = \{(x, c) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b\}$ . Considere o espaço topológico  $(X, \tau)$  em que  $X = \mathbb{R}^2$  e  $\tau$  é a topologia gerada pela base  $\mathcal{B} = \{I_c(a, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ . Considere as funções  $\pi_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\pi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $\pi_1(x, y) = x$  e  $\pi_2(x, y) = y$ . Determine se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são contínuas, abertas ou fechadas, quando consideramos a topologia usual em  $\mathbb{R}$ .

**Problema 8.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $S \subseteq Y$  um subespaço de  $Y$  com a topologia induzida. Mostre que uma função  $f : X \rightarrow S$  é contínua se, e somente se,  $i \circ f : X \rightarrow Y$  é contínua, onde  $i : S \rightarrow Y$  é a função de inclusão dada por  $i(s) = s$  para todo  $s \in S$ . Use esta equivalência para mostrar que a função  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  é contínua.

**Problema 9.** Considere o espaço topológico  $X = \mathbb{R}$  com a topologia gerada por intervalos do tipo  $(a, +\infty)$ . Identifique quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.

- (a) A soma de duas funções contínuas  $f : X \rightarrow X$  e  $g : X \rightarrow X$  é contínua.
- (b) O produto de duas funções contínuas  $f : X \rightarrow X$  e  $g : X \rightarrow X$  é contínua.
- (c) A função  $f : X \rightarrow X$  dada por  $f(x) = 1$  é contínua.
- (d) A função  $f : X \rightarrow X$  dada por  $f(x) = \lim_{\gamma \rightarrow x^+} \frac{\gamma}{|\gamma|}$  é contínua.
- (e) A função  $f : X \rightarrow X$  dada por  $f(x) = \lim_{\gamma \rightarrow x^-} \frac{\gamma}{|\gamma|}$  é contínua.
- (f) A função  $f : X \rightarrow X$  dada por  $f(x) = x^2$  é contínua.
- (g) A função  $h : X \rightarrow X$  dada por  $h(x) = x^3$  é contínua.
- (h) A função  $h : X \rightarrow X$  dada por  $h(x) = x|x|$  é contínua.
- (i) Se  $f : X \rightarrow X$  é contínua, então  $f$  é não-decrescente.
- (j) Se  $f : X \rightarrow X$  é não-decrescente, então  $f$  é contínua.

**Problema 10.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $A, B \subseteq X$  subconjuntos quaisquer. Prove ou ache um contraexemplo para as seguintes identidades:

- (a)  $\partial\partial A = \partial A$ .
- (b)  $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$ .
- (c)  $\partial(A \cap B) = \partial A \cap \partial B$ .
- (d)  $\partial(\text{int}(A)) = \partial A$ .
- (e)  $\partial(\overline{A}) = \partial A$ .
- (f)  $\partial(X \setminus A) = \partial A$ .
- (g)  $\text{int}(\partial A) = \emptyset$ .
- (h)  $\overline{\partial A} = \partial A$ .

**Problema 11.** Considere o espaço topológico  $X = \mathbb{R}$  com a topologia gerada por intervalos semi-abertos do tipo  $[a, b)$ . Prove as seguintes afirmações:

- (a) Qualquer intervalo semi-aberto do tipo  $[a, b)$  é um conjunto fechado em  $X$ .
- (b) Se  $A$  e  $B$  são conjuntos fechados em  $X$ , então existem conjuntos abertos  $U$  e  $V$  em  $X$  tais que  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .
- (c) Se  $K \subseteq X$  é compacto, então  $K$  é enumerável.
- (d) Uma função  $f : X \rightarrow X$  é contínua se, e somente se, para todo  $x \in X$  e todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in [x, x + \delta)$ , temos  $f(y) \in [f(x), f(x) + \varepsilon)$ .

**Problema 12.** Dados  $a \in \mathbb{Z}$  e um inteiro positivo  $r$ , considere o a progressão aritmética  $N_r(a) = \{a + nr : n \in \mathbb{Z}\}$ . Um conjunto  $A \subseteq \mathbb{Z}$  é dito ser *aberto* se para todo  $a \in A$ , existe um inteiro positivo  $r$  tal que  $N_r(a) \subseteq A$ . Prove cada uma das seguintes afirmações:

- (a) A coleção de conjuntos abertos em  $\mathbb{Z}$  forma uma topologia sobre  $\mathbb{Z}$ .
- (b) Todo conjunto aberto possui infinitos elementos.
- (c) Todo conjunto do tipo  $N_r(a)$  é um conjunto fechado em  $\mathbb{Z}$ .
- (d) Vale a seguinte identidade:  $\mathbb{Z} \setminus \{-1, +1\} = \bigcup_{p \text{ primo}} N_p(0)$ .

Conclua que o conjunto dos números primos é infinito.