Passeios, caminhos e ciclos

Nota: partes substanciais deste texto foram geradas com apoio de um modelo de linguagem (IA), sob orientação e revisão do autor.

Nesta aula formalizamos a noção de **passeio** em um grafo, generalizando os caminhos e ciclos que já conhecíamos da Aula 2, e usamos essa ferramenta para mostrar que todo grafo com grau mínimo alto é obrigado a conter caminhos e ciclos longos. De quebra, obtemos uma caracterização alternativa dos grafos bipartidos (Aula 5) em termos da paridade dos passeios fechados de G.

1 Passeios

Definição 1. Um **passeio** em um grafo G é uma sequência de vértices $P = v_0v_1 \cdots v_t$ tal que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$. O inteiro $t \geq 0$ é o **número de passos** de P. Os vértices v_0 e v_t são as **extremidades** de P; os demais vértices da sequência são os **vértices internos** de P (uma extremidade também pode ser um vértice interno, caso reapareça na sequência). Dizemos que P é **fechado** se $v_0 = v_t$, e **aberto** caso contrário. Se todos os vértices de P são distintos, exceto possivelmente as duas extremidades, dizemos que P é **simples**. Se todas as arestas $v_0v_1, \ldots, v_{t-1}v_t$ de P são distintas entre si, dizemos que P é uma **trilha**.

Um passeio simples aberto $v_0v_1 \cdots v_t$ determina um subgrafo de G com conjunto de vértices $\{v_0, \ldots, v_t\}$ e arestas $\{v_0v_1, \ldots, v_{t-1}v_t\}$, que é isomorfo a P_{t+1} (Aula 2); chamamos esse subgrafo de **caminho de comprimento** t em G, com extremidades v_0 e v_t. Da mesma forma, um passeio simples fechado com $t \geq 3$ passos determina um subgrafo isomorfo a C_t (Aula 2), chamado **ciclo de comprimento** t em G. Ao longo desta e das próximas aulas, trataremos livremente passeios simples abertos como caminhos, e passeios simples fechados (com pelo menos três passos) como ciclos.

Exemplo 1. Considere o grafo G da figura abaixo.

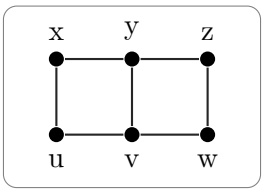


Figura 1: O grafo G usado para ilustrar diferentes tipos de passeio.

O passeio $P_1 = uvyz$ tem 3 passos, é aberto e simples: logo é um caminho de comprimento 3 em G. O passeio $P_2 = uvyxu$ tem 4 passos, é fechado, e é simples (as únicas repetições possíveis seriam entre as extremidades u): logo é um ciclo de comprimento

4 em G. Já o passeio $P_3 = uvyvu$ tem 4 passos e é fechado, mas não é simples, pois o vértice interno v se repete; note também que P_3 não é uma trilha, pois a aresta uv (respectivamente vy) é percorrida duas vezes, uma em cada sentido.

2 Concatenando passeios

Proposição 1. *Sejam G um grafo e $u, v, w \in V(G)$. Se existe um passeio de u a v em G e um passeio de v a w em G, então existe um passeio de u a w em G.*

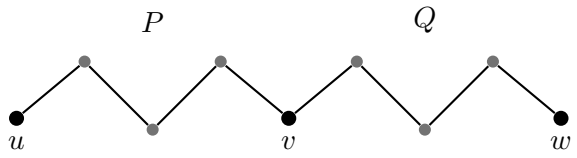


Figura 2: Concatenando um passeio P de u a v (vértices internos em cinza) com um passeio Q de v a w, obtemos um passeio R de u a w: basta percorrer P até v e continuar por Q até w, sem repetir o vértice v em comum.

Demonstração. Sejam $P = v_0 v_1 \cdots v_s$ um passeio de u a v (isto é, $v_0 = u$ e $v_s = v$) e $Q = u_0 u_1 \cdots u_r$ um passeio de v a w (isto é, $u_0 = v$ e $u_r = w$). Considere a sequência

$$R := v_0 v_1 \cdots v_s \, u_1 u_2 \cdots u_r,$$

obtida percorrendo P até v e, em seguida, percorrendo Q a partir de v, sem repetir esse vértice comum. Todo par consecutivo de R é uma aresta de G: os pares herdados de P e de Q já satisfazem isso por hipótese, e o único par novo, $v_s u_1 = v u_1$, é uma aresta de G por ser o primeiro par de Q. Logo R é um passeio de u a w em G, com $s + r$ passos. □

3 De passeios a caminhos

Proposição 2. *Sejam G um grafo e $u, v \in V(G)$. Se existe um passeio de u a v em G, então G contém um caminho de u a v.*

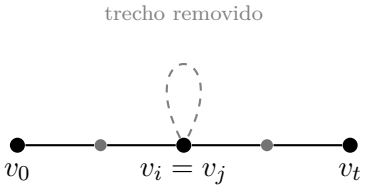


Figura 3: Se um vértice se repete em $P = v_0 v_1 \cdots v_t$, digamos $v_i = v_j$ com $i < j$, o laço tracejado representa o trecho $v_i v_{i+1} \cdots v_j$, que sai de v_i e volta a esse mesmo vértice. Removendo esse trecho obtemos o passeio mais curto $P' = v_0 \cdots v_i \, v_{j+1} \cdots v_t$, ainda de u a v.

Demonstração. Como existe algum passeio de u a v em G, e o número de passos de um passeio é sempre um inteiro não-negativo, podemos escolher um passeio $P = v_0v_1 \cdots v_t$ de u a v (isto é, $v_0 = u$ e $v_t = v$) com número de passos mínimo dentre todos esses. Afirmamos que P é simples.

Suponha que não. Então existem índices $0 \leq i < j \leq t$ com $v_i = v_j$ e $(i, j) \neq (0, t)$. Considere a sequência

$$P' := v_0 \cdots v_i \, v_{j+1} \cdots v_t$$

(que termina em v_i quando $j = t$). A sequência P' é um passeio de u a v: os pares consecutivos herdados de P continuam sendo arestas e, quando $j < t$, o único par novo, v_iv_{j+1}, é uma aresta porque $v_iv_{j+1} = v_jv_{j+1} \in E(G)$. Mas P' tem $t - (j - i) < t$ passos, contradizendo a minimalidade de P.

Logo a única repetição possível em P é $i = 0$ e $j = t$, isto é, $u = v$. Nesse caso a minimalidade força $t = 0$ (o passeio $v_0 = u$, com zero passos, já liga u a $v = u$), e P é trivialmente simples. Em todos os casos, P é um passeio simples: se aberto, P é um caminho de u a v em G; se fechado (o caso $u = v$, $t = 0$), o caminho de u a v é o caminho trivial de comprimento 0, formado apenas pelo vértice u. □

A demonstração acima mostra, na verdade, algo mais forte, que usaremos a seguir: *todo passeio com número de passos mínimo entre dois vértices dados é simples.*

4 De trilhas fechadas a ciclos

Note que uma trilha fechada não pode ter 1 nem 2 passos: o primeiro caso exigiria um laço $v_0v_0 \in E(G)$, e o segundo obrigaria a repetir a mesma aresta v_0v_1 duas vezes (uma em cada sentido), o que viola a definição de trilha. Logo toda trilha fechada tem 0 ou pelo menos 3 passos.

Proposição 3. *Se G possui uma trilha fechada com pelo menos um passo, então G possui um ciclo.*

Demonstração. Escolha, dentre as trilhas fechadas de G com pelo menos um passo, uma trilha $C = v_0v_1 \cdots v_t$ (isto é, $v_0 = v_t$, $t \geq 1$) com número de passos mínimo. Pela observação acima, $t \geq 3$. Afirmamos que C é simples, isto é, que $v_0, \ldots, v_{t-1}$ são dois a dois distintos.

Suponha que não: existem $0 \leq i < j \leq t - 1$ com $v_i = v_j$. Considere as duas sequências

$$C_1 := v_iv_{i+1} \cdots v_j \qquad \text{e} \qquad C_2 := v_0 \cdots v_i \, v_{j+1} \cdots v_t.$$

Como $v_i = v_j$, ambas são fechadas; como C_1 e C_2 usam apenas arestas de C (que são distintas, pois C é trilha), ambas são trilhas. Seus números de passos são $j - i$ e $t - (j - i)$, respectivamente, ambos positivos (pois $0 \leq i < j \leq t - 1 < t$), e somam exatamente t. Pela minimalidade de t, cada um desses dois números deveria ser pelo menos t; mas isso é impossível, já que ambos são positivos e sua soma é t.

Logo C é simples e, como $t \geq 3$, C é um ciclo de G. □

Proposição 4. *Se G possui uma trilha fechada com número ímpar de passos, então G possui um ciclo de comprimento ímpar.*

Demonstração. Escolha, dentre as trilhas fechadas de G com número ímpar de passos (que existem, por hipótese), uma trilha $C = v_0 v_1 \cdots v_t$ com número de passos t mínimo. Como na demonstração anterior, $t \geq 3$. Afirmamos novamente que C é simples.

Suponha que não, e construa C_1 e C_2 como na demonstração anterior, com números de passos $j - i$ e $t - (j - i)$, ambos positivos e somando t. Como t é ímpar, exatamente um desses dois números é ímpar; digamos que seja o de C_1 (o outro caso é análogo, trocando os papéis de C_1 e C_2). Então C_1 é uma trilha fechada com número ímpar de passos e $j - i < t$ (pois $t - (j - i) \geq 1$), contradizendo a minimalidade de t.

Logo C é simples e, como $t \geq 3$, C é um ciclo de comprimento ímpar de G. □

5 Passeios fechados de comprimento ímpar

A proposição a seguir generaliza a anterior, trocando trilha por passeio: agora as arestas do passeio fechado não precisam mais ser distintas.

Proposição 5. *Se G possui um passeio fechado com número ímpar de passos, então G possui um ciclo de comprimento ímpar.*

Demonstração. Escolha, dentre os passeios fechados de G com número ímpar de passos, um passeio $C = v_0 v_1 \cdots v_t$ com número de passos t mínimo. Afirmamos que C é simples.

Suponha que não: existem $0 \leq i < j \leq t - 1$ com $v_i = v_j$. Exatamente como antes, as sequências $C_1 := v_i v_{i+1} \cdots v_j$ e $C_2 := v_0 \cdots v_i \, v_{j+1} \cdots v_t$ são passeios fechados (aqui nem precisamos verificar que suas arestas são distintas, já que C é apenas um passeio), com números de passos $j - i$ e $t - (j - i)$, ambos positivos e somando t. Como t é ímpar, um desses dois números é ímpar; esse passeio fechado tem menos de t passos, contradizendo a minimalidade de t.

Logo C é simples. Em particular, $t \geq 3$: um passeio fechado simples com $t = 1$ exigiria um laço, e um com $t = 2$ teria v_0, v_1, v_0 com $v_1 \neq v_0$, o que já é simples, mas não ímpar; como t é ímpar por hipótese, resta $t \geq 3$. Portanto C é um ciclo de comprimento ímpar de G. □

6 Uma caracterização de grafos bipartidos via passeios

Corolário 1. *Um grafo G possui um ciclo de comprimento ímpar se, e somente se, G possui um passeio fechado com número ímpar de passos.*

Demonstração. Se G possui um ciclo de comprimento ímpar, esse próprio ciclo já é um passeio fechado com um número ímpar de passos. Reciprocamente, se G possui um passeio fechado com número ímpar de passos, a Proposição 5 garante que G possui um ciclo de comprimento ímpar. □

Combinando esse corolário com o teorema de caracterização dos grafos bipartidos (Aula 5), que diz que G é bipartido se, e somente se, G não possui nenhum ciclo de comprimento ímpar, obtemos uma reformulação inteiramente em termos de passeios.

Corolário 2. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não possui nenhum passeio fechado com número ímpar de passos.*

Essa reformulação é útil porque um passeio, ao contrário de um ciclo, pode ser construído incrementalmente, sem se preocupar em evitar repetições de vértices ou de arestas. É essa a ideia por trás do algoritmo usual para reconhecer grafos bipartidos: percorrendo G a partir de um vértice qualquer e marcando a paridade do número de passos usado para alcançar cada vértice visitado, encontramos uma bipartição de G a menos que, em algum momento, um mesmo vértice seja alcançado por dois passeios de paridades distintas – o que produz um passeio fechado de comprimento ímpar.

7 Grau mínimo força caminhos e ciclos longos

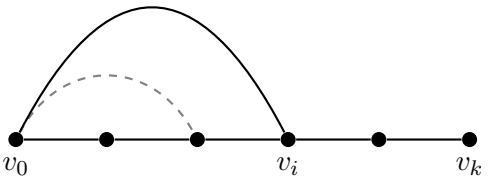


Figura 4: Um caminho de comprimento máximo $P = v_0v_1 \cdots v_k$ em G. Todo vizinho de v_0 pertence a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ (arco tracejado): caso contrário, prefixar P com esse vizinho daria um caminho mais longo (Proposição 6). Tomando v_i como o vizinho de v_0 de maior índice (arco sólido), o passeio $v_0v_1 \cdots v_iv_0$ é um ciclo de comprimento $i + 1$ (Proposição 7).

Proposição 6. *Todo grafo G possui um caminho de comprimento $\delta(G)$.*

Demonstração. Como G é finito, existe em G um caminho de comprimento máximo; fixe um deles, digamos $P = v_0v_1 \cdots v_k$.

Todo vizinho de v_0 pertence a P: se algum vizinho w de v_0 não estivesse em $\{v_0, \ldots, v_k\}$, então $wv_0v_1 \cdots v_k$ seria um caminho de comprimento $k + 1$, contradizendo a maximalidade de P. Como v_0 possui $d_G(v_0) \geq \delta(G)$ vizinhos, todos distintos e pertencentes a $\{v_1, \ldots, v_k\}$, segue que $k \geq \delta(G)$. Em particular, o subcaminho $v_0v_1 \cdots v_{\delta(G)}$ é um caminho de comprimento exatamente $\delta(G)$ em G. □

Proposição 7. *Se $\delta(G) \geq 2$, então G possui um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G)+1$.*

Demonstração. Considere, como na demonstração anterior, um caminho de comprimento máximo $P = v_0v_1 \cdots v_k$ em G; em particular, $k \geq \delta(G)$.

Seja i o maior índice em $\{1, \ldots, k\}$ tal que v_i é vizinho de v_0. Como v_0 tem pelo menos $\delta(G)$ vizinhos, todos em $\{v_1, \ldots, v_k\}$ (pela maximalidade de P, como visto acima), o maior

índice entre eles satisfaz $i \geq \delta(G)$. Então $v_0v_1 \cdots v_iv_0$ é um passeio fechado cujos vértices $v_0, \ldots, v_i$ são dois a dois distintos, pois pertencem ao caminho P; logo é simples, com $i + 1 \geq \delta(G) + 1 \geq 3$ passos. Portanto $v_0v_1 \cdots v_iv_0$ é um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$ em G. □

Fica como exercício, para ser discutido na próxima aula:

Exercício 1. Se G possui n vértices e $\delta(G) \geq \dfrac{n+1}{2}$, então G possui um ciclo de comprimento n.