Automorfismos de grafos

Um isomorfismo especialmente interessante é aquele de um grafo consigo mesmo: ele revela as simetrias internas do grafo, isto é, as formas de reetiquetar os vértices sem alterar sua estrutura. Nesta aula, formalizamos essa ideia sob o nome de **automorfismo**, mostramos que o conjunto de automorfismos de um grafo forma um grupo, e usamos esse grupo para responder duas perguntas de contagem que ficaram em aberto: quantos grafos rotulados existem em cada classe de isomorfismo, e quantas cópias de um grafo fixo G cabem dentro do grafo completo K_n. Em ambos os casos, a resposta é a mesma ideia: quanto mais simétrico o grafo, menos cópias distintas ele produz.

1 Automorfismo

Definição 1. Um **automorfismo** de um grafo $G = (V, E)$ é um isomorfismo de G em si mesmo, isto é, uma bijeção $f : V \to V$ tal que, para quaisquer $u, v \in V$, temos $uv \in E$ se e somente se $f(u)f(v) \in E$.

Toda função identidade $\mathrm{id} : V \to V$ é, trivialmente, um automorfismo de qualquer grafo G; ela é chamada de **automorfismo trivial**. O caso interessante é quando G admite automorfismos *não triviais*.

Exemplo 1. Automorfismos não triviais do ciclo C_4. Considere o ciclo $G = C_4$ com $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{12, 23, 34, 41\}$. A rotação $\rho : V \to V$ dada por $\rho(i) = i + 1 \pmod 4$ (isto é, $\rho(1) = 2$, $\rho(2) = 3$, $\rho(3) = 4$, $\rho(4) = 1$) é um automorfismo de G: como as arestas de G formam exatamente o ciclo $1, 2, 3, 4, 1$, aplicar ρ simplesmente desloca esse ciclo para $2, 3, 4, 1, 2$, que é o mesmo ciclo. A reflexão $\varphi : V \to V$ dada por $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 4$, $\varphi(3) = 3$, $\varphi(4) = 2$ também é um automorfismo de G.

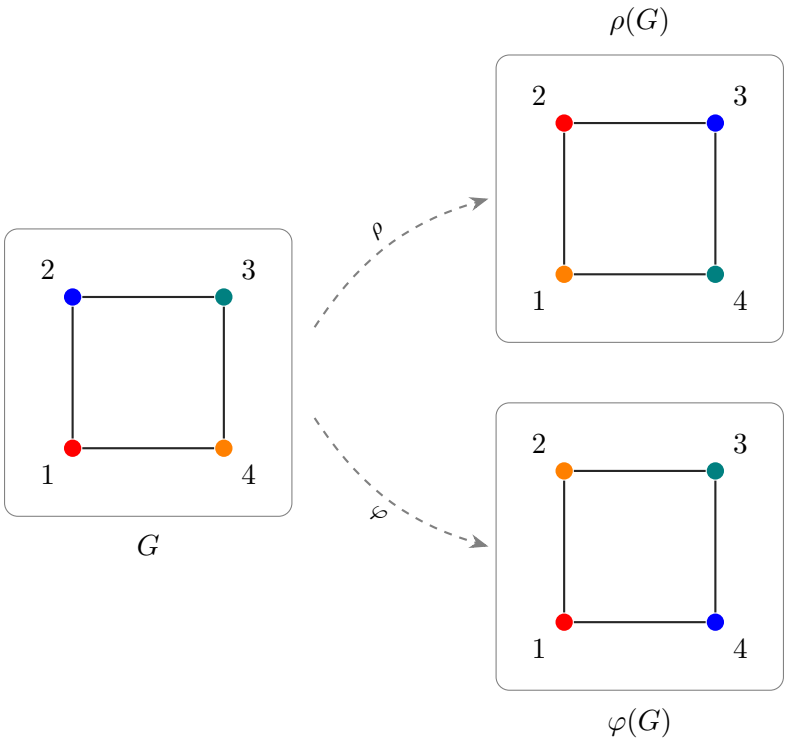


Figura 1: Os automorfismos ρ e φ do ciclo C_4: cada vértice mantém a mesma cor nos três desenhos, mas o rótulo indica sua imagem sob ρ (acima) ou φ (abaixo).

Exercício 1. Mostre que se f é um automorfismo de um grafo G e $v \in V(G)$, então $d_G(v) = d_G(f(v))$.

A composição de dois automorfismos de G é novamente um automorfismo de G, e a inversa de um automorfismo também é um automorfismo de G. Essas propriedades fazem com que o conjunto de todos os automorfismos de G, equipado com a operação de composição de funções, tenha uma estrutura algébrica muito rica: a de um grupo.

Definição 2. O **grupo de automorfismo** de um grafo G, denotado por $\mathrm{Aut}(G)$, é o conjunto de todos os automorfismos de G, munido da operação de composição de funções.

De fato, $\mathrm{Aut}(G)$ satisfaz os axiomas de grupo: a composição é associativa; a identidade id pertence a $\mathrm{Aut}(G)$ e é o elemento neutro; e todo $f \in \mathrm{Aut}(G)$ possui inversa $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ (pois f é bijeção e f^{-1} também preserva adjacências).

Exemplo 2. O grupo de automorfismo de C_4. Retomando o ciclo C_4 visto no início desta seção, com a rotação ρ e a reflexão φ definidas ali, vamos determinar $\mathrm{Aut}(C_4)$ por completo. Como a composição de dois automorfismos de G é sempre um automorfismo de G, toda composição formada por ρ e φ também pertence a $\mathrm{Aut}(C_4)$; vamos descrever explicitamente todos os elementos que essas composições produzem. Compondo ρ consigo mesma obtemos quatro permutações distintas dos vértices de C_4: a identidade $\mathrm{id} = \rho^0$; a própria ρ, que desloca cada vértice uma posição adiante no ciclo (uma rotação de 90°); ρ^2, dada por $\rho^2(i) = i + 2 \pmod 4$ (rotação de 180°); e ρ^3, dada por $\rho^3(i) = i + 3 \pmod 4$

(rotação de 270°); a próxima potência já fecha o ciclo, $\rho^4 = \mathrm{id}$. Compondo cada uma dessas rotações com φ obtemos mais quatro elementos, φ, $\rho\varphi$, $\rho^2\varphi$ e $\rho^3\varphi$ (onde a notação $\rho^k\varphi$ significa "aplique φ e depois ρ^k"): φ fixa os vértices 1 e 3 e troca 2 com 4; $\rho^2\varphi$ fixa 2 e 4 e troca 1 com 3; já $\rho\varphi$ troca 1 com 2 e 3 com 4, sem fixar nenhum vértice; e $\rho^3\varphi$ troca 1 com 4 e 2 com 3, também sem fixar nenhum vértice. A tabela abaixo resume a ação de cada um desses oito elementos sobre os vértices de G:

f	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	Descrição
id	1	2	3	4	identidade
ρ	2	3	4	1	rotação de 90°
ρ^2	3	4	1	2	rotação de 180°
ρ^3	4	1	2	3	rotação de 270°
φ	1	4	3	2	reflexão que fixa 1 e 3
$\rho\varphi$	2	1	4	3	reflexão que troca 1 com 2 e 3 com 4
$\rho^2\varphi$	3	2	1	4	reflexão que fixa 2 e 4
$\rho^3\varphi$	4	3	2	1	reflexão que troca 1 com 4 e 2 com 3

Essas oito permutações são todas distintas, como se vê comparando as colunas da tabela, e nenhuma outra composição de ρ e φ produz um automorfismo novo: a relação $\varphi\rho\varphi = \rho^{-1}$ (que também pode ser conferida diretamente na tabela) permite reescrever qualquer composição na forma ρ^k ou $\rho^k\varphi$, com $0 \le k \le 3$. Além disso, pode-se mostrar que o ciclo C_4 não admite nenhum automorfismo além desses oito. Logo

$$\mathrm{Aut}(C_4) = \{\mathrm{id},\ \rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \varphi,\ \rho\varphi,\ \rho^2\varphi,\ \rho^3\varphi\}$$

possui exatamente 8 elementos: as quatro rotações $\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \rho^3$ e as quatro reflexões $\varphi, \rho\varphi, \rho^2\varphi, \rho^3\varphi$. Esse grupo é chamado de **grupo diedral** D_4; no exercício a seguir veremos que o mesmo padrão se repete para $\mathrm{Aut}(C_n)$ com qualquer n, que será isomorfo ao grupo diedral D_n, de $2n$ elementos. Em particular, $|\mathrm{Aut}(C_4)| = 8$.

Exercício 2. Generalize o exemplo anterior para o ciclo C_n, com $n \ge 3$ vértices $V = \{1, \ldots, n\}$ (índices tomados módulo n). Defina a rotação $\rho(i) = i + 1 \pmod n$ e uma reflexão φ apropriada, e descreva os elementos de $\mathrm{Aut}(C_n)$ como as n potências ρ^k e as n composições $\rho^k\varphi$, com $0 \le k \le n-1$. Mostre que $\mathrm{Aut}(C_n)$ possui exatamente $2n$ elementos: é o grupo diedral D_n, o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados.

Exemplo 3. O grupo de automorfismo de $K_{2,3}$. Considere o grafo bipartido completo $G = K_{2,3}$, com partição $V(G) = A \cup B$, $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, e arestas a_ib_j para todo $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$. Os vértices de A têm grau 3, pois cada um é adjacente aos três vértices de B, enquanto os vértices de B têm grau 2, pois cada um é adjacente aos dois vértices de A. Como todo automorfismo preserva grau e $2 \neq 3$, qualquer automorfismo f de G deve satisfazer $f(A) = A$ e $f(B) = B$: não é possível, por exemplo, que f leve algum a_i a algum b_j. Reciprocamente, como G é completo bipartido, todo par $u \in A$, $v \in B$ é uma aresta, de modo que qualquer bijeção que preserve cada uma das duas partes separadamente preserva automaticamente todas as adjacências (e todas as não adjacências,

já que não há arestas dentro de A nem dentro de B). Esse é o mesmo argumento usado para K_n, aplicado a cada parte. Logo $\mathrm{Aut}(G)$ é exatamente o conjunto das funções $f : V \to V$ da forma $f|_A = \pi_A$ e $f|_B = \pi_B$, onde π_A é uma permutação arbitrária de A e π_B é uma permutação arbitrária de B, isto é,

$$\mathrm{Aut}(K_{2,3}) \cong S_2 \times S_3, \qquad |\mathrm{Aut}(K_{2,3})| = 2! \cdot 3! = 12.$$

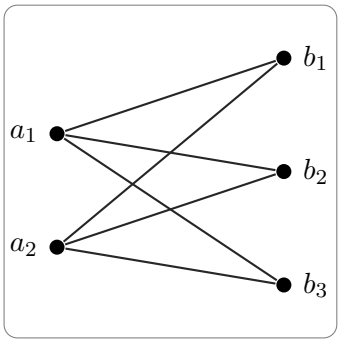


Figura 2: O grafo bipartido completo $K_{2,3}$: todo automorfismo deve preservar separadamente as partes $A = \{a_1, a_2\}$ (grau 3) e $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ (grau 2).

Exercício 3. Determine, em geral, o grupo de automorfismo $\mathrm{Aut}(K_{a,b})$ do grafo bipartido completo com partes de tamanho a e b (para $a, b \geq 1$). Distinga os casos $a \neq b$ e $a = b$: neste último caso, ao contrário do exemplo acima, existem automorfismos que trocam as duas partes entre si.

Exemplo 4. O grupo de automorfismo de K_n. Como todo par de vértices distintos de K_n é uma aresta, *qualquer* bijeção $f : V(K_n) \to V(K_n)$ preserva trivialmente a adjacência (todo par de vértices é adjacente antes e depois de aplicar f). Logo $\mathrm{Aut}(K_n)$ é o grupo de *todas* as permutações de $V(K_n)$, isto é, $\mathrm{Aut}(K_n) \cong S_n$, o grupo simétrico de grau n. Em particular, $|\mathrm{Aut}(K_n)| = n!$.

Encerramos esta primeira leva de exemplos com um caso mais elaborado, que mostra como a alta simetria de um grafo pode ser calculada a partir de sua construção combinatória.

Exemplo 5. O grupo de automorfismo do grafo de Petersen. Lembre-se que o grafo de Petersen pode ser construído tomando como vértices os $\binom{5}{2} = 10$ pares de elementos do conjunto $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e ligando dois vértices por uma aresta sempre que os pares correspondentes forem *disjuntos*. Toda permutação $\sigma \in S_5$ de $[5]$ induz uma bijeção f_σ nos vértices do grafo de Petersen, definida por $f_\sigma(\{a, b\}) = \{\sigma(a), \sigma(b)\}$. Como σ é uma bijeção de $[5]$, dois pares $\{a, b\}$ e $\{c, d\}$ são disjuntos se e somente se $\{\sigma(a), \sigma(b)\}$ e $\{\sigma(c), \sigma(d)\}$ também o forem; logo f_σ é um automorfismo do grafo de Petersen. Isso já nos dá pelo menos $|S_5| = 5! = 120$ automorfismos distintos. De fato, pode-se mostrar que esses são os únicos automorfismos do grafo de Petersen (a demonstração completa foge do escopo

destas notas introdutórias, mas pode ser vista em material complementar sobre ações de grupos), e portanto

$$\mathrm{Aut}(P) \cong S_5 \qquad \text{e} \qquad |\mathrm{Aut}(P)| = 120.$$

Isso é notável: apesar de ter apenas 10 vértices e 15 arestas, o grafo de Petersen possui 120 simetrias distintas, a mesma quantidade de simetrias que K_5, apesar de ser um grafo muito mais esparso.

Exercício 4. Determine o grupo de automorfismo do hipercubo Q_d, definido na Aula 2, para $d \geq 1$. **Dica.** Mostre primeiro que um automorfismo de Q_d fica completamente determinado pela imagem de um único vértice v e pelas imagens dos seus d vizinhos: a partir dessas $d+1$ imagens, a imagem de qualquer outro vértice de Q_d pode ser deduzida usando apenas a estrutura do grafo, por exemplo comparando distâncias ou vizinhanças comuns com v e seus vizinhos.

Dizemos que um grafo G é **assimétrico** se o único automorfismo de G for o automorfismo trivial. O menor exemplo de um grafo assimétrico, além do K_1, possui 6 vértices. De fato existem 8 grafos não-rotulados com 6 vértices que são assimétricos. No exemplo a seguir, apresentamos um.

Exemplo 6. Um exemplo de grafo assimétrico. Considere o grafo G da figura abaixo. Os graus dos vértices são $d(1)$=1, $d(2)$=2, $d(3)$=3, $d(4)$=3, $d(5)$=1, $d(6)$=2. Qualquer automorfismo f de G deve preservar o grau de cada vértice. Logo f deve permutar os conjuntos $\{1,5\}$, $\{2,6\}$ e $\{3,4\}$. Como 1 tem um vizinho de grau 2 e 5 não tem, necessariamente devemos ter $f(1) = 1$ e $f(5) = 5$. Como 2 tem um vizinho de grau 1 e 6 não tem, necessariamente devemos ter $f(2) = 2$ e $f(6) = 6$. Como 3 tem dois vizinhos de grau 2 e 4 não tem, necessariamente devemos ter $f(3) = 3$ e $f(4) = 4$. Logo o único automorfismo de G é o trivial.

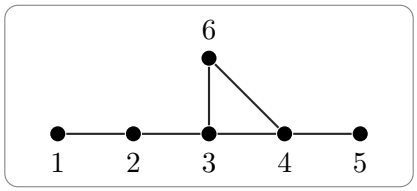


Figura 3: Um grafo assimétrico com 6 vértices.

Exercício 5. Generalise o exemplo da Figura 3 para mostrar que para todo $n \geq 6$, existe um grafo assimétrico com n vértices.

Exercício 6. Mostre que o grafo de Frucht dado na figura abaixo é assimétrico.

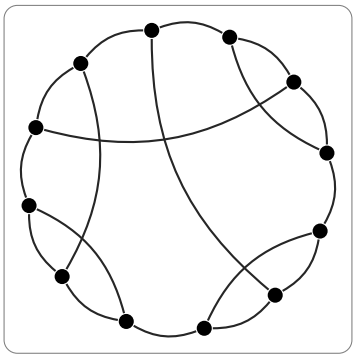


Figura 4: O grafo de Frucht, um grafo assimétrico 3-regular com 12 vértices.

Combinando os exemplos e exercícios acima, vemos que $|\mathrm{Aut}(G)|$ pode variar enormemente: de 1 (grafos assimétricos, como o de Frucht) a $n!$ (o grafo completo K_n) e até 120 (o grafo de Petersen), passando por valores intermediários como 8 (o ciclo C_4) e 12 (o grafo $K_{2,3}$).

Encerramos a seção com uma aplicação do grupo de automorfismo a um problema de contagem que deixamos em aberto na Aula 2. Vimos que grafos rotulados distintos podem ser isomorfos entre si, e que cada grafo não-rotulado corresponde a uma classe de isomorfismo. Quantos grafos rotulados há em cada classe? O teorema a seguir responde essa pergunta, e a resposta depende apenas do número de simetrias do grafo: quanto mais simétrico o grafo, *menos* grafos rotulados ele gera.

Teorema 1. *Sejam G um grafo com n vértices e S um conjunto com n elementos. O número de grafos rotulados sobre S que são isomorfos a G é exatamente*

$$\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}.$$

Em particular, tomando $S = [n]$, esse é o número de grafos rotulados com n vértices isomorfos a G.

Note que o conjunto de rótulos S não influencia a resposta: só o seu tamanho importa. Isso é o que nos permitirá, na próxima seção, contar cópias de G dentro de um grafo grande, aplicando o teorema a cada conjunto de n vértices desse grafo.

Demonstração. Podemos supor que $V(G) = S$, pois trocar G por um grafo isomorfo a ele não altera nem a quantidade que queremos contar nem o número de automorfismos. Seja $\mathrm{Sym}(S)$ o grupo de todas as permutações de S e seja $\mathcal{G}_S$ o conjunto de todos os grafos rotulados sobre S. Dadas $\sigma \in \mathrm{Sym}(S)$ e $H \in \mathcal{G}_S$, denotamos por $\sigma \cdot H$ o grafo com conjunto de vértices S e conjunto de arestas $\{\sigma(u)\sigma(v) : uv \in E(H)\}$, isto é, o grafo obtido de H trocando o rótulo de cada vértice v por $\sigma(v)$. Isso define uma ação do grupo $\mathrm{Sym}(S)$ sobre o conjunto $\mathcal{G}_S$: a identidade age trivialmente, e reetiquetar por τ e depois por σ é o mesmo que reetiquetar por $\sigma \circ \tau$, isto é, $\sigma \cdot (\tau \cdot H) = (\sigma \circ \tau) \cdot H$.

Basta agora identificar a órbita e o estabilizador de G nessa ação. A órbita de G é o conjunto $\{\sigma \cdot G : \sigma \in \mathrm{Sym}(S)\}$, que é exatamente o conjunto dos grafos rotulados sobre S

isomorfos a G. De fato, cada $\sigma \in \mathrm{Sym}(S)$ é um isomorfismo de G em $\sigma \cdot G$; reciprocamente, se H é um grafo rotulado sobre S isomorfo a G, então um isomorfismo σ de G em H é uma bijeção de $V(G) = S$ em $V(H) = S$, ou seja, uma permutação de S, e $H = \sigma \cdot G$. Já o estabilizador de G é o conjunto $\{\sigma \in \mathrm{Sym}(S) : \sigma \cdot G = G\}$, que é exatamente $\mathrm{Aut}(G)$: basta aplicar a observação anterior ao caso $H = G$.

Pelo teorema órbita-estabilizador, a órbita de um elemento sob a ação de um grupo finito Γ tem tamanho $|\Gamma|$ dividido pelo tamanho do estabilizador desse elemento. Portanto o número de grafos rotulados sobre S isomorfos a G é

$$\frac{|\mathrm{Sym}(S)|}{|\mathrm{Aut}(G)|} = \frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|},$$

como queríamos demonstrar. □

Exercício 7. Quantos grafos rotulados com 10 vértices são isomorfos ao grafo de Petersen?

2 Contando subgrafos de K_n

A noção de automorfismo e a de subgrafo, vista na Aula 3, se encontram num problema de contagem bastante natural. Como K_n possui todas as arestas possíveis entre os seus n vértices, os subgrafos de K_n são simplesmente *todos* os grafos rotulados sobre subconjuntos de $[n]$. Fixado um grafo G, faz sentido então perguntar quantas **cópias** de G existem em K_n, isto é, quantos subgrafos de K_n são isomorfos a G. Essa quantidade aparecerá de novo mais adiante no curso: contar cópias de um grafo fixo dentro de um grafo grande é o problema central de várias áreas da teoria dos grafos.

A resposta combina duas contagens que já sabemos fazer. Escolher um subgrafo de K_n isomorfo a G é escolher *onde* ele mora (um conjunto de vértices) e *como* ele é desenhado ali (um grafo rotulado sobre esse conjunto).

Proposição 1. *Seja G um grafo com k vértices e seja $n \geq k$. O número de subgrafos de K_n isomorfos a G é exatamente*

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{|\mathrm{Aut}(G)|} = \frac{n!}{(n-k)!\,|\mathrm{Aut}(G)|}.$$

Demonstração. Seja H um subgrafo de K_n isomorfo a G. Como H é isomorfo a G, temos $|V(H)| = k$, e portanto $V(H)$ é um dos $\binom{n}{k}$ subconjuntos de $[n]$ com k elementos. Reciprocamente, fixado um conjunto $S \subseteq [n]$ com $|S| = k$, os subgrafos de K_n isomorfos a G com $V(H) = S$ são exatamente os grafos rotulados sobre S que são isomorfos a G. Segue do Teorema 1 que há exatamente $k!/|\mathrm{Aut}(G)|$ tais subgrafos.

Como cada subgrafo H é contado uma única vez (a saber, quando $S = V(H)$), o número total é

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{|\mathrm{Aut}(G)|} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{k!}{|\mathrm{Aut}(G)|} = \frac{n!}{(n-k)!\,|\mathrm{Aut}(G)|},$$

como queríamos demonstrar. □

Vale a pena observar o que a fórmula diz: entre dois grafos com o mesmo número de vértices, o mais simétrico é o que aparece *menos* vezes em K_n. O fator $n!/(n-k)!$ conta as maneiras de posicionar os k vértices de G em $[n]$, uma a uma; dividir por $|\mathrm{Aut}(G)|$ corrige o fato de que posicionamentos que diferem por uma simetria de G produzem exatamente o mesmo subgrafo.

Exemplo 7. Algumas cópias contadas. Aplicando a proposição aos grafos cujos automorfismos já calculamos:

- **Triângulos.** Como $|\mathrm{Aut}(K_3)| = 3! = 6$, o número de subgrafos de K_n isomorfos a K_3 é $\binom{n}{3} \cdot 6/6 = \binom{n}{3}$. Isso era de se esperar: um triângulo em K_n é determinado pelos seus três vértices.
- **Caminhos com três vértices.** O caminho P_3 admite apenas dois automorfismos (a identidade e a troca das duas pontas), de modo que o número de cópias de P_3 em K_n é $\binom{n}{3} \cdot 6/2 = 3\binom{n}{3}$. De fato, cada trio de vértices abriga três caminhos distintos, um para cada escolha do vértice do meio.
- **Quadrados.** Vimos que $|\mathrm{Aut}(C_4)| = 8$, e portanto há $\binom{n}{4} \cdot 24/8 = 3\binom{n}{4}$ cópias de C_4 em K_n: cada quatro vértices abrigam três quadriláteros, um para cada maneira de emparelhar os quatro vértices em dois pares de vértices opostos.
- **Grafo de Petersen.** Como $|\mathrm{Aut}(P)| = 120$, o número de cópias do grafo de Petersen em K_n é $n!/((n-10)! \cdot 120)$.

Um cuidado com o enunciado: a proposição conta subgrafos, e não subgrafos *induzidos*. A diferença aqui é radical, pois todo subgrafo induzido de K_n é completo: se $S \subseteq [n]$, então $K_n[S] = K_{|S|}$. Assim, o número de subgrafos induzidos de K_n isomorfos a G é $\binom{n}{k}$ se G for completo, e zero caso contrário. É justamente por isso que a pergunta interessante sobre K_n é a de contar subgrafos quaisquer.

Exercício 8. Mostre que, para todo $k \geq 3$, o número de subgrafos de K_n isomorfos ao ciclo C_k é $\binom{n}{k} \cdot \frac{(k-1)!}{2}$.

Exercício 9. Quantos subgrafos de K_n são isomorfos ao grafo estrela $K_{1,3}$? Conte de duas maneiras: usando a proposição acima, e escolhendo diretamente o centro da estrela e as suas três folhas.

Exercício 10. Seja G um grafo com k vértices. Mostre que o número de subgrafos de K_n isomorfos a G está entre $\frac{(n-k)^k}{|\mathrm{Aut}(G)|}$ e $\frac{n^k}{|\mathrm{Aut}(G)|}$. Assim, para k fixo, esse número cresce essencialmente como n^k dividido pelo número de simetrias de G.