

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Notas de aula em

Teoria dos Grafos

Júlio Araújo & Claudia Linhares Sales

12 de agosto de 2026

Prefácio

O objetivo destas notas é resumir o conteúdo ministrado na disciplina de (Introdução à) Teoria dos Grafos, ofertada pelos departamentos de Computação e Matemática da Universidade Federal do Ceará.

Estas notas de aula foram fortemente inspiradas nos livros de Bondy e Murty Bondy and Murty [2008] e West West [2001]. A primeira versão dessas notas teve ajuda na redação das alunas Ana Beatriz Martins, Carolina Araujo Dias e Rayane Gomes de Castro. Uma primeira revisão dessas notas foi feita por vários dos estudantes da turma CK0125 - Teoria dos Grafos, semestre 2020.2, da UFC.

Por se tratar de um resumo, este texto não deve ser usado como única fonte de referência.

Conteúdo

1 Introdução **7**
- 1.1 Definições Básicas . . . 7
- 1.2 Passeios, Ciclos e Trilhas . . . 12
- 1.3 Grafos Eulerianos . . . 15
- 1.4 Árvores . . . 17
- 1.5 Grafos direcionados . . . 20
- 1.6 Exercícios . . . 21

2 Emparelhamentos e Coberturas **25**
- 2.1 Emparelhamentos . . . 25
- 2.2 Coberturas . . . 28
- 2.3 Exercícios . . . 30

3 Conectividade **31**
- 3.1 Conectividade em Vértices . . . 31
  - 3.1.1 Grafos com $\kappa(G) = 1$ . . . 32
  - 3.1.2 Grafos com $\kappa(G) \geq 2$ . . . 33
  - 3.1.3 Grafos com $\kappa(G) \geq k$ . . . 36
- 3.2 Conectividade em Arestas . . . 36
  - 3.2.1 Grafos com $\kappa'(G) = k$ . . . 38
- 3.3 Conectividade em Digrafos . . . 38
- 3.4 Exercícios . . . 38

4 Coloração de Grafos **41**
- 4.1 Limitantes . . . 42
  - 4.1.1 O limitante $\Delta(G) + 1$ . . . 42
  - 4.1.2 O limitante ω . . . 45
- 4.2 Grafos k-cromáticos . . . 47
- 4.3 Coloração de Arestas . . . 51
- 4.4 Exercícios . . . 53

5 Grafos Planares **55**
- 5.1 Coloração de grafos planares . . . 59
- 5.2 Subdivisões e menores . . . 60
- 5.3 Grafos periplanares . . . 62
- 5.4 Exercícios . . . 62

6 Ciclos Hamiltonianos **65**
6.1 Condições necessárias 65
6.2 Condições suficientes 65
6.3 Caminho Hamiltoniano 67
6.4 Exercícios 67

Capítulo 1

Introdução

A área de Teoria dos Grafos possui, de certa forma, um dicionário próprio. Vários termos usados no cotidiano como 'árvore', 'caminho', 'emparelhamento', 'coloração', etc. possuem uma definição diferente no contexto de grafos. Neste capítulo, apresentamos as definições mais elementares para o entendimento deste conteúdo, assim como diversos exemplos e alguns resultados preliminares.

1.1 Definições Básicas

Definição 1.1. Um *grafo* G é uma tripla formada por um conjunto de *vértices* V, um conjunto de *arestas* E e uma função φ, chamada de *função de incidência*, que associa a cada aresta um par não-ordenado de vértices não necessariamente distintos. Tais vértices são chamados de *extremidades* da aresta.

Para um grafo G, é frequente o uso da notação $V(G)$ e $E(G)$ para representar os conjuntos V e E, respectivamente, quando os mesmos não estão definidos no contexto. Usaremos a notação $\varphi(G)$ ou φ_G para denotar a função de incidência de G, quando a mesma não estiver definida. Se u e v são os vértices associados uma aresta e pela função φ, denotaremos tal associação por $\varphi(e) = uv$[1].

Exemplo 1.1. Se tomarmos $V(G) = \{v_1, \ldots, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, \ldots, e_8\}$ e a função $\varphi(G)$ tal que $\varphi(e_1) = v_1v_2$, $\varphi(e_2) = v_2v_3$, $\varphi(e_3) = v_3v_3$, $\varphi(e_4) = v_3v_4$, $\varphi(e_5) = v_2v_4$, $\varphi(e_6) = v_4v_5$, $\varphi(e_7) = v_2v_5$, $\varphi(e_8) = v_2v_5$, temos um grafo. Para representarmos esse grafo, podemos tomar um ponto no plano para cada vértice, e a aresta será uma curva que liga os vértices associados à mesma. Veja uma representação deste grafo na Figura 1.1.

Há ainda outros termos que relacionam vértices e arestas em um grafo:

Definição 1.2. Se $u, v \in V(G)$ são as extremidades de uma aresta $e \in E(G)$, então dizemos que e é *incidente* a u e a v e que u e v são *adjacentes* ou *vizinhos*. Além disso, se duas arestas distintas e_1 e e_2 de G tem uma extremidade comum, dizemos que são *adjacentes*.

[1]Note que como u e v formam um par não-ordenado de vértices não necessariamente distintos, nem a notação com parênteses nem com chaves é adequada. Há autores que usam a notação com chaves, mas, nesse caso, enfatizam que tanto as arestas, como o conjunto de arestas, são multiconjuntos.

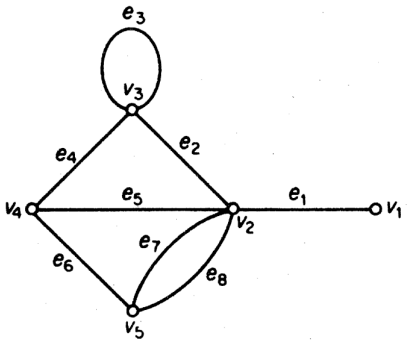


Figura 1.1: Exemplo de grafo com laço e arestas múltiplas.

Por exemplo, na Figura 1.1, e_1 é incidente a v_1 e a v_2, logo v_1 e v_2 são adjacentes ou vizinhos. Já v_4 não é vizinho de v_1.

Grafos são usados para modelar diversos problemas cotidianos. Por exemplo, vértices podem ser usados para representar pessoas em uma rede social e uma aresta conectará duas pessoas se as mesmas forem amigas na rede. Vértices também podem representar antenas de comunicação e, nesse contexto, dois vértices poderiam se conectar por uma aresta se as antenas correspondentes podem causar interferência uma na outra devido à proximidade.

Em Teoria dos Grafos, busca-se a obtenção de resultados estruturais, ou seja, que não dependam os nomes associados aos vértices e/ou às arestas do mesmo. O que importa é a forma que os vértices estão relacionados entre si por arestas. A grande maioria das definições e resultados nesta área levam em conta este fato.

Todo grafo admite uma *representação gráfica* no plano, onde cada vértice é um ponto e cada aresta é uma linha que une os pontos correspondentes às suas extremidades. O Exemplo 1.1 ilustra a definição de representação gráfica de um grafo. Uma outra forma de representar um grafo, que é bastante útil para a resolução de problemas em grafos por meio de computação, é com matrizes. Há duas formas tradicionais de se representar um grafo com matrizes, como são definidas a seguir:

Definição 1.3. Seja G um grafo tal que $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$. A *matriz de incidência*, denotada por $M(G)$, é uma matriz $n \times m$, onde o valor de cada elemento m_{ij} da matriz é determinado pelo número de vezes que o vértice i é incidente à aresta j.

Definição 1.4. Seja G um grafo tal que $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$. A *matriz de adjacência*, denotada por $A(G)$, é uma matriz $n \times n$, onde o valor de cada elemento a_{ij} da matriz é o número de arestas em G com extremidades em v_i e v_j.

Veja na Figura 1.2 a representação gráfica de um grafo com duas respectivas matrizes de incidência e de adjacência.

Do ponto de vista computacional, um grafo G ainda pode ser representado por uma *lista de adjacências*, que é uma estrutura de dados consistindo de um vetor de tamanho $n(G)$, com um campo para cada vértice u de G, que contém a cabeça de uma lista dos vértices adjacentes a u. No caso de grafos com arestas múltiplas, cada elemento da lista pode ter um atributo que indique o número de arestas entre o cabeça da lista e aquele vizinho.

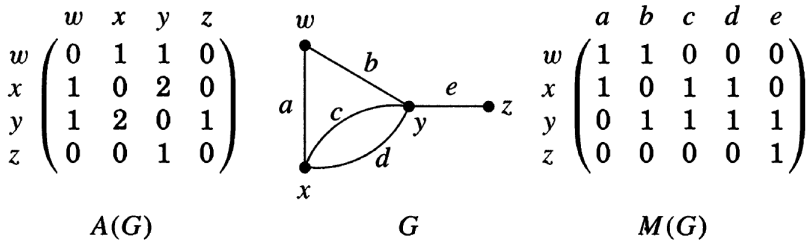


Figura 1.2: As matrizes de incidência e adjacência de um grafo G.

Definição 1.5. Um grafo G é dito *finito* se $V(G)$ e $E(G)$ são conjuntos finitos. G é chamado de *vazio* se $E(G) = \emptyset$. G é chamado de *nulo* se $V(G) = \emptyset$. Um grafo vazio com apenas um vértice é chamado de *trivial*.

Nestas notas de aula, somente faremos referência a grafos finitos. Além disso, apesar de apresentarmos a definição de grafo nulo, todos os grafos considerados aqui serão não-nulos [2].

Definição 1.6. Para um grafo G, se uma aresta $e \in E(G)$ tem como ambas extremidades um vértice u, então dizemos que e é um *laço*. Se duas arestas $e_1, e_2 \in E(G)$ têm as mesmas extremidades (observe que isso não implica necessariamente que $e_1 = e_2$, mas apenas que a função $\varphi(G)$ não é injetiva), então dizemos que e_1 e e_2 são *arestas múltiplas* (ou paralelas).

Na Figura 1.1, temos um laço na aresta e_3 e arestas múltiplas em e_7 e e_8.

Definição 1.7. Um grafo G é *simples*, se G é finito e não possui laços nem arestas múltiplas.

Comumente se omite a função φ da definição de grafos simples, uma vez que cada aresta é bem definida por suas extremidades. Nesse caso, representa-se G apenas como um par $G = (V, E)$. Como as extremidades em grafos simples são necessariamente distintas, é frequente também a definição de grafos simples considerando que o conjunto de arestas é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de $V(G)$. Além disso, nesse caso denotamos por $e = uv$, se u e v são os elementos de V associados a e, sendo $e \in E$.

Definição 1.8. O número de vértices de G é chamado de *ordem* de G e é denotado por $n(G)$, ou simplesmente n quando G está claro no contexto. O número de arestas de G é o *tamanho* de G e denotado por $m(G)$, ou somente m.

Vale ressaltar que alguns autores preferem denotar $m(G)$ por $e(G)$. Note que a ordem do grafo G representado na Figura 1.1 é $n(G) = 5$, enquanto que seu tamanho é $m(G) = 8$.

Definição 1.9. O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d_G(v)$, é o número de vezes que v é extremidade de uma aresta de G. Um vértice de grau zero é chamado de *isolado*.

[2] Esta hipótese é comumente utilizada na literatura já que diversos resultados clássicos deveriam ser adaptados caso o grafo nulo fosse considerado.

Note que um laço adiciona duas unidades ao grau de v. Na Figura 1.1, o grau de v_3 é $d_G(v_3) = 4$, enquanto que o grau de v_2 é $d_G(v_2) = 5$.

Proposição 1.1. *Se G é um grafo, então $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m(G)$.*

Demonstração. Ao somar os graus de todos os vértices do grafo, estamos contando cada aresta duas vezes, já que, mesmo no caso em que a aresta é um laço, a mesma é contabilizada duas vezes na soma dos graus dos vértices. □

Definição 1.10. O grau mínimo de G é denotado por $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v)$. De modo análogo, o grau máximo de G é $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$. Um grafo G é *regular* se $\Delta(G) = \delta(G)$. O grafo tal que todos os seus vértices têm grau igual a k é chamado de k-regular.

Note que o grafo G da Figura 1.1 satisfaz $\delta(G) = 1$, enquanto que $\Delta(G) = 5$.

Definição 1.11. Um *grafo par* é um grafo tal que todos os seus vértices têm grau par. Caso todos tenham grau ímpar, o chamamos de *grafo ímpar*.

Definição 1.12. A *vizinhança* de $v \in V(G)$ em G, denotada por $N_G(v)$, é o conjunto de vértices de vizinhos de v em G.

Na Figura 1.1, veja que $N_G(v_3) = \{v_2, v_3, v_4\}$, enquanto que $N_G(v_1) = \{v_2\}$. Note que se G é simples, então $d_G(v) = |N_G(v)|$, para todo $v \in V(G)$.

Definição 1.13. Se G e H são grafos cujas funções de incidência são φ_G e φ_H, respectivamente, dizemos que H é *subgrafo* de G, denotado por $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e $\varphi_H \subseteq \varphi_G$.

Lembre que funções são subconjuntos de pares ordenados e, portanto, a contenção $\varphi_H \subseteq \varphi_G$ está bem definida. É importante salientar que, para grafos simples, é suficiente dizer que $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Teorema 1.1. *Seja $\mathcal{G}$ uma família de grafos. Então, a relação de subgrafo $\subseteq$ é uma ordem parcial em $\mathcal{G}$.*

Definição 1.14. Se G é um grafo simples, então o *complemento* (ou *grafo complementar*) de G é o grafo $\overline{G}$ simples tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $e \in E(\overline{G})$ se, e somente se, $e \notin E(G)$.

Veja um exemplo do complemento de um grafo na Figura 1.3.

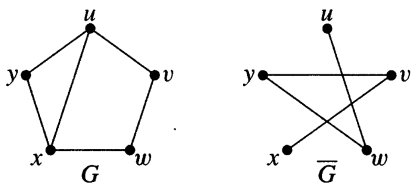


Figura 1.3: Grafo Complementar.

Definição 1.15. H é um subgrafo *gerador* de G se $H \subseteq G$ e $V(H) = V(G)$.

Definição 1.16. H é um subgrafo *induzido* de G se $H \subseteq G$ e $e \in E(H)$ se, e somente se, $e \in E(G)$. Em particular, se $S \subseteq V(G)$, dizemos que o subgrafo H de G induzido por S, denotado por $H = G[S]$ é tal que H é subgrafo induzido de G e $V(H) = S$.

Note que quando H é subgrafo gerador e induzido de G, temos $H = G$.

Definição 1.17. G é *livre* de H se G não possui H como subgrafo induzido.

Definição 1.18. Um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto independente*, ou *estável*, se para todos $u, v \in S$ não existe aresta $e = uv$.

Definição 1.19. Dizemos que $S \subseteq V(G)$ é uma *clique* se para todos $u, v \in V(G)$ tais que $u \neq v$, existe aresta $e = uv \in E(G)$.

Observação 1.1. Dado um grafo G, denotamos por $\alpha(G)$ e $\omega(G)$ os tamanhos do maior conjunto independente e da maior clique de G, respectivamente.

Observação 1.2. Note que em um grafo simples G, temos que $S \subseteq V(G)$ é clique de G se, e somente se, S é conjunto independente de $\overline{G}$.

Definição 1.20. O grafo G é *bipartido* se $V(G)$ é pode ser particionado em no máximo dois conjuntos independentes, chamados *partes* de G[3].

Definição 1.21. O grafo simples G é um *caminho* se seus vértices podem ser colocados em sequência de modo que $uv \in E(G)$ se, e somente se, uv são consecutivos.

Definição 1.22. O grafo simples G é um *ciclo* se seus vértices são ordenados de modo circular e temos que $uv \in E(G)$ se, e somente se, uv são consecutivos no ciclo.

Definição 1.23. Um *grafo completo* é um grafo simples onde todos os seus vértices são adjacentes, isto é, para todos $u, v \in V(G)$, temos $uv \in E(G)$. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices. Um *grafo completo bipartido* é um grafo simples bipartido tais que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles pertencem a partes distintas. Denotamos por $K_{a,b}$ o grafo bipartido completo com partes de ordem a e b.

Note que, formalmente, os grafos $G_1 = (V_1, \emptyset)$ e $G_2 = (V_2, \emptyset)$, onde $V_1 = \{a\}$ e $V_2 = \{b\}$ são grafos distintos, uma vez que $V_1 \neq V_2$. Ao estudarmos grafos normalmente estamos mais interessados em como os vértices estão conectados, do que quais são os "nomes" dos vértices. Para evitar esse problema, a noção de isomorfismo é essencial.

Para podermos formalmente "ignorar os nomes" dos vértices e das arestas, precisamos ser capazes de identificar quando dois grafos, apesar de não terem o mesmo conjunto de vértices e de arestas, têm a mesma estrutura. Esse formalismo é possível através da noção de isomorfismo de grafos.

Definição 1.24. Dois grafos G e H são ditos *isomorfos* se existem bijeções $f : V(G) \to V(H)$ e $g : E(G) \to E(H)$ tais que $\varphi_G(e) = uv$ se, e somente se, $\varphi_H(g(e)) = f(u)f(v)$. Usamos a notação $G \cong H$ para representar que G e H são isomorfos.

Como o isomorfismo relaciona dois grafos através de uma bijeção entre os conjuntos de vértices, o seguinte resultado pode ser observado:

[3] A expressão "no máximo" serve exclusivamente para cobrir o caso do grafo vazio, admitindo ainda que cada parte de uma partição deve ser não-vazia. Alguns autores admitem que uma partição de um conjunto pode ter partes vazias. Nesse caso, a expressão "no máximo" seria desnecessária.

Teorema 1.2. *Seja $\mathcal{G}$ uma família qualquer de grafos. A relação de isomorfismo em $\mathcal{G}$ é uma relação de equivalência.*

Logo, existirá então uma partição de $\mathcal{G}$ em classes de equivalência. Observe que os elementos de uma mesma classe de equivalência são isomorfos, e, portanto, têm a mesma estrutura.

Nos referimos a um *grafo sem rótulos* como a um elemento qualquer da classe de equivalência à qual esse grafo pertence.

Todas as afirmações até então apresentadas e aquelas que seguirão, referentes a definições, teoremas, ou suas demonstrações, não dependerão dos nomes dos vértices, mas somente da estrutura do grafo. Dessa forma, os resultados se aplicam aos grafos não rotulados, ou seja, a qualquer grafo na mesma classe de equivalência.

1.2 Passeios, Ciclos e Trilhas

Definição 1.25. Um v_0, v_k*-passeio* em um grafo G é uma sequência $v_0e_1v_1 \dots v_{k-1}e_kv_k$ tal que $e_i = v_{i-1}v_i$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Um *passeio fechado* é um passeio tal que $v_0 = v_k$. Vale enfatizar que k pode ser zero.

Definição 1.26. Uma u, v*-trilha* em um grafo G é um u, v-passeio em G sem repetição de arestas, ou seja, $e_i \neq e_j$ para todos $i, j \in \{1, \dots, k\}$ com $i \neq j$. Uma *trilha fechada* é um trilha tal que $v_0 = v_k$.

Definição 1.27. Um u, v*-caminho* em um grafo G é uma u, v-trilha em G sem repetição de vértices e, portanto, $v_i \neq v_j$ para todos $i, j \in \{0, \dots, k\}$ com $i \neq j$. Denotamos v_0 e v_n como as *extremidades* do caminho. Um caminho com n vértices é denotado por P_n[4].

Definição 1.28. Um *ciclo* em um grafo G é um v_0, v_n-caminho em que (se permite e se exige que) $v_0 = v_n$. Um n-ciclo, denotado por C_n, é um ciclo com n vértices.

Note a diferença entre as Definições 1.21 e 1.22, e as Definições 1.27 e 1.28, respectivamente. As primeiras fazem referência a quando um grafo é chamado de caminho ou ciclo. Já estas últimas usam nomenclatura similar para dizer quando um grafo possui um subgrafo isomorfo a um caminho ou a um ciclo. Além disso, apesar de as definições formais de "passeio em G" ("trilha em G", "ciclo em G" e "caminho em G") utilizarem a noção de sequência, com abuso de notação, nos também referiremos a um passeio (trilha, caminho e ciclo, respectivamente) como o subgrafo de G formado pelos vértices e arestas que pertencem à sequência que define o passeio (trilha, caminho e ciclo, respectivamente).

Definição 1.29. O *comprimento* de um $v_0e_1v_1 \dots v_{k-1}e_kv_k$ passeio (e, consequentemente, trilha, caminho, ciclo) é k. Um ciclo é dito *ímpar* se o seu comprimento é ímpar, senão ele é *par*.

Definição 1.30. A *cintura* de um grafo é o comprimento do menor ciclo em G. Um grafo sem ciclos tem cintura infinita.

Definição 1.31. Se o grafo G tem u, v-caminho, então a *distância* de u a v, denotada por $dist_G(u, v)$ ou $d_G(u, v)$, é o menor comprimento de um u, v-caminho. Para dois vértices $u, v \in V(G)$ tais que não existe u, v-caminho em G, dizemos que a distância de u para v é infinita.

[4]Esta é a convenção usada nestas notas de aula e em alguns livros, porém, vale salientar que para diversos autores P_n representa um caminho com n arestas e, portanto, $n + 1$ vértices.

Definição 1.32. Um grafo é dito *conexo* se, para todos $u, v \in V(G)$, existe u, v-caminho em G. Se G não é conexo, o chamamos de *desconexo*.

Definição 1.33. H é uma *componente* (conexa) de um grafo G se H é um subgrafo maximal conexo de G. A maximalidade se refere a relação de subgrafo que é uma ordem parcial na família de todos os subgrafos de G (vide Teorema 1.1).

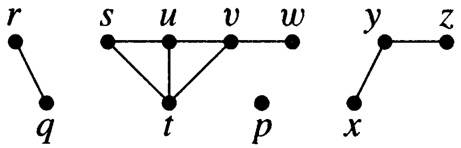


Figura 1.4: As componentes de um grafo G.

As componentes que formam o grafo G da Figura 1.4 são os subgrafos induzidos pelos conjuntos de vértices $\{p\}, \{q, r\}, \{s, t, u, v, w\}$ e $\{x, y, z\}$.

Proposição 1.2. *Todo u, v-passeio W contém um u, v-caminho P, ou seja, existe uma subsequência de W que é um u, v-caminho.*

Demonstração. Mostraremos que a implicação é verdadeira aplicando indução no comprimento k do passeio $W = v_0e_1v_1 \dots v_{k-1}e_kv_k$.

Base: Considere que $k = 0$. Logo, $W = v_0$ e, portanto, $u = v = v_0$. Nesse caso, W já é um u, v-caminho e basta tomarmos $P = W$.

Hipótese Indutiva: Todo u, v-passeio W' com comprimento $l \leq k$ contém um u, v-caminho P'.

Passo Indutivo: Seja W um u, v-passeio em G de comprimento $k + 1$. Faremos a análise de dois casos:

Caso (1): W não possui repetição de vértices. Nesse caso, novamente W é um u, v-caminho e basta tomarmos $P = W$.

Caso (2): $W = v_0e_1v_1 \dots v_ie_{i+1}v_{i+1} \dots v_je_{j+1}v_{j+1} \dots v_{k-1}e_kv_k$ e existem $i, j \in \{0, \dots k\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$. Nesse caso, como $i < j$, observe que $W' = v_0e_1v_1 \dots v_ie_{j+1}v_{j+1} \dots v_{k-1}e_kv_k$ é um u, v-passeio de comprimento menor ou igual a k contido em W. Pela hipótese de indução, W' contém um u, v-caminho P' e esse caminho está contido em W.

□

De modo similar, podemos provar que:

Lema 1.1. *Todo passeio fechado ímpar contém um ciclo ímpar.*

Demonstração. Por indução no comprimento l do passeio fechado W.

Base: Considere que $l = 1$. Neste caso, o passeio fechado ímpar $W = v_0e_1v_0$ de comprimento 1 corresponde a um laço, isto é, W é um 1-ciclo.

Hipótese Indutiva: Suponha que para todo passeio fechado ímpar W' com o comprimento $l' \leq 2k - 1$, contém um ciclo ímpar.

Passo Indutivo: Seja $W = v_1e_1...e_{2k+1}v_1$ o passeio fechado ímpar de comprimento $l = 2k + 1$. Se W não tem vértices repetidos (ao desconsiderar o primeiro e o último

vértice do passeio), W será o próprio ciclo ímpar. Caso contrário, seja $v \neq v_1$ um vértice repetido em W. Seja Q o passeio fechado definido pela subsequência de W de v_1 à primeira ocorrência de v e da última ocorrência de v à v_1, e seja R a subsequência restante. Note que Q e R são passeios fechados e como W é ímpar, exatamente um deles é ímpar. Sem perda de generalidade, seja Q esse passeio ímpar. Aplicando a hipótese indutiva no passeio fechado ímpar Q, temos um ciclo ímpar no passeio W. □

O Lema 1.1 é o argumento essencial para provarmos um primeiro resultado menos trivial (e menos intuitivo, à primeira vista) sobre a estrutura de uma classe de grafos:

Teorema 1.3 (König, 1936)**.** *Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém ciclos ímpares.*

Demonstração. Note que um grafo G é bipartido se, e somente se, cada uma de suas componentes for um grafo bipartido. Logo, vamos supor, sem perda de generalidade, que G é conexo.

($\Rightarrow$) Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido. Por absurdo, seja $C = v_1e_1v_2...v_{2k+1}e_{2k+1}v_1$ um ciclo ímpar em G. Sem perda de generalidade, suponha que $v_1 \in A$. Logo, note que v_{2p} e v_{2p+1} pertencem, respectivamente, a B e a A, para todo $1 \leq p \leq k$. Consequentemente, $v_1, v_{2k+1} \in A$, o que contradiz a hipótese de que A é conjunto independente.

($\Leftarrow$) Seja G um grafo sem ciclos ímpares e tome um vértice arbitrário $u \in V(G)$. Defina os conjuntos $A = \{v \in V(G) \mid \exists k \in \mathbb{N}\ (dist_G(u, v) = 2k)\}$ e $B = V(G) \setminus A$. Note que $\{A, B\}$ é uma partição de $V(G)$ uma vez que o grafo G é conexo e, portanto, a distância entre cada par de vértices está bem definida. Vamos mostrar que A e B são conjuntos independentes. Por absurdo, suponha que existem $v, w \in A$ tais que $vw \in E(G)$. Logo, pela definição de A, v e w estão a uma distância par de u. Combinando caminhos mínimos de u à v e u à w, com a aresta vw, obtemos um passeio fechado ímpar. Pelo Lema 1.1, há ciclo ímpar em G, contradizendo nossa hipótese. O caso em que $v, w \in B$ tais que $vw \in E(G)$ é análogo. □

Definição 1.34. Sejam G um grafo, $v \in V(G)$ e $e \in E(G)$. Então,[5]

- $G - v$ é o grafo tal que: $V(G - v) = V(G) \setminus \{v\}$ e $E(G - v) = E(G) \setminus \{uv \in E(G) \mid u \in V(G)\}$.
- $G - e$ é o grafo tal que: $V(G - e) = V(G)$ e $E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}$.
- $G - S$ é obtido de G pela remoção de cada vértice (ou aresta) em S.

Definição 1.35. Um *vértice de corte* (ou *articulação*) $v \in V(G)$ em um grafo G é tal que $G - v$ possui mais componentes que G.

Definição 1.36. Uma *aresta de corte* (ou *ponte*) $e \in E(G)$ em um grafo G é tal que $G - e$ possui mais componentes que G.

Se G é conexo e $e = uv \in E(G)$, note que $G - e$ tem no máximo duas componentes. Usando o mesmo raciocínio, pode-se observar que:

Proposição 1.3. *Se G é um grafo com n vértices e k arestas, então G possui ao menos $n - k$ componentes.*

[5] As funções de incidência de $G - v$ e $G - e$ são as restrições da função $\varphi(G)$ ao novo conjunto de arestas correspondente.

Demonstração. Basta observar que a adição de uma aresta $e = uv$ diminui o número de componentes em no máximo uma unidade - no caso em que as componentes de u e de v eram distintas. □

Ainda sobre remoção de arestas, note que:

Teorema 1.4. *Uma aresta e em um grafo G é de corte se, e somente se, e não pertence a nenhum ciclo de G.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $e = uv$ uma aresta de corte do grafo G. Suponha, por absurdo, que e pertence a um ciclo C. Note que a remoção da aresta e não desconecta u de v, graças ao ciclo C. Portanto, $G - e$ permanece com o mesmo número de componentes. Isso contradiz o fato de e ser uma aresta de corte.

($\Leftarrow$) Suponha que $e = uv$ não pertence a nenhum ciclo. Por absurdo, suponha que e não é aresta de corte, logo $G - e$ possui as mesmas componentes. Portanto, em $G - e$ existe $u, v - caminho\ P$. Então, $P + e$ é ciclo de G que contém e. Absurdo! □

Finalmente, é importante destacarmos um grafo que frequentemente é usado como contra-exemplos para diversas conjecturas: o grafo de Petersen.

Definição 1.37. O *grafo de Petersen* é o grafo simples que possui 10 vértices $V(G) = \{v_{\{i,j\}} \mid i \neq j \text{ e } i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ e existe uma aresta $v_{\{i,j\}}v_{\{k,l\}} \in E(G)$ se, e somente se, $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$.

Veja representações do grafo de Petersen na Figura 1.5.

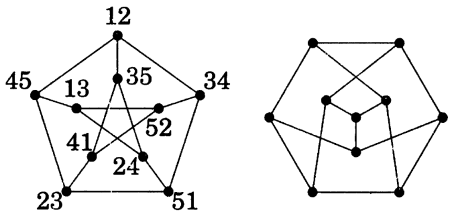


Figura 1.5: Grafo de Petersen.

1.3 Grafos Eulerianos

Um dos resultados mais antigos que se modela com grafos é o problema de pontes de Königsberg. Alguns autores citam como o trabalho que fundou a área de Teoria dos Grafos.

O célebre matemático Leonhard Euler respondeu a questão se era possível atravessar todas as pontes da cidade de Königsberg uma única vez, retornando a posição inicial, em 1736. Veja na Figura 1.6 uma representação das pontes da cidade e o grafo associado.

Definição 1.38. Uma *trilha Euleriana* em um grafo é uma trilha fechada que percorre todas as arestas do grafo.

Definição 1.39. Um grafo é *Euleriano* se o mesmo contém uma trilha Euleriana.

Observe que na Figura 1.6 as arestas correspondem às pontes de Königsberg. Note que, para existir um passeio fechado que percorra cada aresta apenas uma vez, precisamos que para cada aresta incidente num vértice v também haja uma outra aresta incidente a v para que saiamos do mesmo.

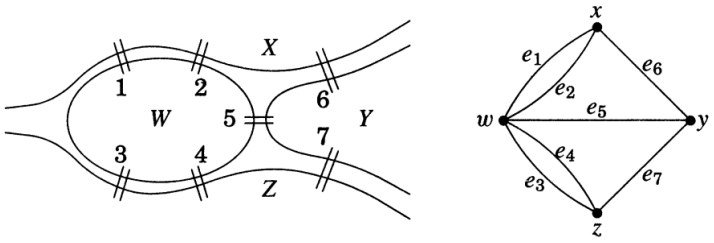


Figura 1.6: Representação das pontes da cidade de Königsberg (atualmente conhecida como Kaliningrado).

Euler mostrou essa propriedade formulando um teorema, que faz uso do seguinte lema.

Lema 1.2. *Se cada vértice do grafo G tem grau pelo menos 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração. Seja P um caminho maximal em G e seja u uma extremidade de P. Como P não pode ser maior, cada vizinho de u já deve ser um vértice de P. Como u tem grau pelo menos 2, ele deve ter um vizinho v em $V(P)$ por uma aresta que não está em P. O (sub)caminho P' em P de v a u combinado com a aresta uv completa um ciclo em G. □

Teorema 1.5 (Euler, 1736)**.** *G é Euleriano se, e somente se, G possui no máximo uma componente não trivial e todos os vértices de G têm grau par.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Obviamente, tal trilha só existe se houver, no máximo, uma componente não trivial. Se G é Euleriano, observe que a cada ocorrência de um mesmo vértice $v \in V(G)$ na sequência definida pela trilha Euleriana, temos duas arestas associadas a v: a que o antecede e a que o sucede. Se estas arestas forem distintas, ou mesmo no caso em que elas sejam iguais (ou seja, um laço) temos que essas arestas somam duas unidades ao grau de v. Logo, o grau de cada vértice visitado é par.

($\Leftarrow$) Por indução em $m(G)$.

Base: Considere $m(G) = 0$. Logo, G é vazio. Seja $v \in V(G)$. Tome a trilha $T = v$. Por vacuidade, note que T percorre todas as arestas de G uma única vez. Logo, G é Euleriano.

Hipótese Indutiva: Suponha que se G tem no máximo uma componente não-trivial, os graus de seus vértices são números pares e $|E(G)| = m(G) < k$, então G é Euleriano.

Passo Indutivo: Seja G tal que:

- G tem no máximo uma componente não-trivial H;
- $d_G(v) = 2p$, para algum $p \in \mathbb{N}$;
- $m(G) = k$.

Se $|V(H)| = 1$, então é facilmente obtém-se uma trilha Euleriana percorrendo-se os laços, caso existam. Suponha então que H é componente não-trivial. Logo, todo vértice tem ao menos um vizinho, e, portanto, $\delta(H) \geq 1$. Porém, como os graus em G são pares, temos que $\delta(H) \geq 2$. Pelo Lema 1.2, H possui um ciclo C. Seja H^* o grafo obtido de H pela remoção das arestas do ciclo C. Sejam $v_1, ..., v_p$ os vértices de C (em ordem). Note que H^* não é necessariamente conexo, porém como cada vértice de C perdeu duas unidades de grau, todos os vértices de H^* têm grau par. Cada componente de H^* é um grafo conexo, cujos vértices têm grau par e com menos do que k arestas. Pela hipótese indutiva, cada componente de H^* é Euleriana. Logo, para obtermos uma trilha Euleriana pra H, basta combinarmos as trilhas Eulerianas das componentes de H^* com um passeio nas arestas do ciclo C. Para tanto, percorra o ciclo C em ordem. A cada novo vértice de C visitado, percorra toda e qualquer trilha Euleriana de uma componente de H^* que contém C que ainda não foi percorrida. □

Definição 1.40. A *decomposição* de um grafo G é uma partição de $E(G)$.

É importante ressaltar que a Definição 1.40 é utilizada aqui e por West West [2001], porém não é universal. Há diversas decomposições em grafos bem conhecidas na literatura que não correspondem a uma partição do conjunto de arestas.

Proposição 1.4. *Todo grafo par se decompõe em ciclos.*

Demonstração. Na demonstração do Teorema 1.5, nós mostramos que todo grafo par não trivial tem um ciclo e, ao removermos o ciclo, ainda temos um grafo par. Então, o resultado segue por indução no número de arestas. □

1.4 Árvores

Uma das classes de grafos mais elementares e mais estudadas é a dos grafos acíclicos.

Definição 1.41. Um grafo que não possui ciclos é chamado de *acíclico* ou *floresta*.

Definição 1.42. Um grafo acíclico conexo é uma *árvore*.

Definição 1.43. Um vértice de grau igual a 1 em uma floresta é chamado de *folha*. Um vértice que não é uma folha em uma árvore é chamado de *nó*. Uma *estrela* é uma árvore que possui um vértice que é adjacente a todos os outros. Uma *galáxia* é uma floresta cujas componentes são estrelas.

Definição 1.44. Uma *árvore geradora* de um grafo G é um subgrafo T gerador G tal que T é árvore.

Corolário 1.1. *Todas as arestas de uma floresta são pontes.*

Demonstração. Segue direto do Teorema 1.4. □

Corolário 1.2. *Se G é floresta, então G possui ao menos um vértice de grau no máximo 1, ou seja uma folha.*

Demonstração. Segue direto do Lema 1.2. □

Teorema 1.6. *Se T é uma árvore e $n(T) \geq 2$, então T possui pelo menos duas folhas.*

Demonstração. Seja T uma árvore com $n(T) \geq 2$. Como T é floresta, pelo Corolário 1.2, T possui um vértice de grau no máximo 1. Sabendo que T é um grafo conexo e $n(T) \geq 2$, deduzimos que $\delta(T) \geq 1$. Portanto, T possui uma folha $f_1 \in V(T)$. Seja u o único vizinho de f_1. Como todas as arestas de uma floresta são pontes, pelo Corolário 1.1, em particular, f_1u é ponte. Observe que $T - f_1$ é árvore.

Vamos mostrar por indução em $n(T)$, que T possui folha $f_2 \neq f_1$.

Base: $n(T) = 2$. Nesse caso, $f_2 = u$.

Hipótese Indutiva: Suponha que, para toda árvore T' tal que $2 \leq n(T') < k$, T' possui ao menos 2 folhas.

Passo Indutivo: Suponha que $3 \leq n(T') = k$. Defina $T^* = T - f_1$. Pela hipótese indutiva, T^* possui ao menos duas folhas, f_1^* e f_2^*. Então, sem perda de generalidade, seja $f_1^* \neq u$, note que $d_{T^*}(f_1^*) = d_T(f_1^*)$. Logo, $f_1^* \neq f_1$ e f_1^* é folha em T. □

Teorema 1.7. *Seja T um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) T é uma árvore;

(b) T é conexo e $m(T) = n(T) - 1$;

(c) T é acíclico e $m(T) = n(T) - 1$;

(d) Para todos $u, v \in V(T)$ existe um único u, v-caminho em T.

Demonstração. (a) → (b): Suponha que T é uma árvore. Por definição, T é conexo. Por indução em $n(T)$, vamos provar que $m(T) = n(T) - 1$.

Base: $n(T) = 1$. Como T é acíclico, T é simples e, portanto, $m(T) = 0$.

Hipótese Indutiva: Para toda árvore T' tal que $1 \leq n(T') < k$, temos que $m(T') = n(T') - 1$.

Passo Indutivo: Seja T tal que $2 \leq n(T) = k$. Pelo Corolário 1.2, seja $f \in V(T)$ uma folha de T. Seja $T^* = T - f$, pela hipótese indutiva, temos $m(T^*) = n(T^*) - 1$, isto é, $(m(T) - 1) = (n(T) - 1) - 1$. Podemos concluir que: $m(T) = n(T) - 1$.

(b) → (c): Suponha que T é conexo e que $m(T) = n(T) - 1$. Por absurdo, seja C um ciclo de T. Observe que $|V(C)| = |E(C)|$ e que podemos associar de maneira injetiva para todo $w \notin V(C)$ uma aresta em $E(G) \setminus E(C)$. Para tanto, associamos a $w \notin V(C)$ uma aresta de $E(G) \setminus E(C)$ incidente a w que pertence a um v, w-caminho de menor comprimento, para algum $v \in V(C)$, já que G é conexo. Logo, $|E(G)| \geq |V(G)|$.

(c) → (a): Suponha que $m(G) = n(G) - 1$ e que G é acíclico. Temos que mostrar que G é conexo. Por indução em $n(G)$.

Base: $n(G) = 1$. Como G é acíclico, temos $m(G) = 0$. Portanto, G é grafo trivial, logo conexo.

Hipótese Indutiva: Se $2 \leq n(G) < k$, com $m(G) = n(G) - 1$ e G é acíclico, logo G é conexo.

Passo Indutivo: Seja G acíclico tal que $n(G) = k$ e $m(G) = n(G) - 1$. Como G é acíclico, pelo Corolário 1.2, seja $v \in V(G)$ com $d_G(v) \leq 1$. Faremos dois casos:

Caso (1): $d_G(v) = 1$:

Aplicamos a hipótese indutiva em $G - v$, e portanto, G é conexo.

Caso (2): $d_G(v) = 0$:

Temos $m(G - v) = m(G) = k - 1$ e $n(G - v) = n(G) - 1 = k - 1$.

Sabemos que, por (a) $\rightarrow$ (b), se $G-v$ fosse conexo e acíclico, então $m(G-v) = n(G - v) - 1$. Absurdo!

Sejam $C_1, ..., C_p$ as componentes de $G - v$, com $p \geq 2$. Como cada C_i é conexa e acíclica, temos:

$m(C_i) = n(C_i) - 1, \forall i \in \{1, ..., p\}$.

Logo, $m(G - v) = n(G - v) - p$. Absurdo!

(a) $\rightarrow$ (d): Como T é árvore, por definição T é conexo. Logo, existe um u, v-caminho, para todo $u, v \in V(T)$. Por absurdo, sejam P e Q dois u, v-caminhos distintos em T. Note que, percorrendo P e então Q, temos um passeio fechado em G. Como todo passeio fechado contém um ciclo, pela Proposição 1.2, isso contradiz o fato de G ser acíclico.

(d) $\rightarrow$ (a): Como para todo $u, v \in V(G)$, existe u, v-caminho, então G é conexo. Toda aresta $e = uv$ é o único u, v-caminho de G e pelo Corolário 1.1, temos que e é uma ponte, logo e não pertence a nenhum ciclo (vide Teorema 1.4). Portanto, G é acíclico. □

Corolário 1.3. *São verdadeiras:*

(a) $T + e$ possui um único ciclo.

(b) Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Demonstração. (a) Seja T uma árvore, para todos $u, v \in V(T)$ existe um único $u, v - caminho$. Portanto, ao adicionarmos uma aresta $e = uv$, temos um único ciclo.

(b) Removendo iterativamente arestas pertencentes a ciclos em um grafo conexo, obteremos um subgrafo conexo acíclico, uma vez que o conjunto de arestas é finito. □

Proposição 1.5. *Sejam T^* e T' árvores geradoras de G e $e^* \in E(T^*)$. Então existe $e' \in E(T')$ tal que $(T^* - e^*) + e'$ é uma árvore geradora de G.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.1, e^* é ponte de T^*. Sejam U e U' as duas componentes de $T^* - e^*$. Como G é conexo, T' é árvore geradora de G e $V(G) = V(U) \cup V(U')$, temos que existe uma aresta $e' = ab \in E(T')$, onde $a \in U$ e $b \in U'$. Note que $(T^* - e^*) + e'$ é árvore geradora de G, pois é conexa e $m((T^* - e^*) + e') = n((T^* - e^*) + e') - 1$. □

A Proposição 1.5 é o argumento essencial para a corretude de algoritmos para o problema de Árvore Geradora Mínima. Para mais informações, veja West [2001].

Proposição 1.6. *Se G é floresta, então G é bipartido.*

Demonstração. Por indução em $n(G)$.

Base: $n(G) = 1$. Nesse caso, como G é acíclico, G é o grafo trivial, que é bipartido.

Hipótese Indutiva: Toda árvore G' com $n(G') < k$ é bipartido.

Passo Indutivo: Seja $f \in V(G)$ uma folha. Pela hipótese indutiva, $G' = G - f$ é bipartido, sem perda de generalidade, seja $G' = (A \cup B, E)$ tal que $u \in A$ é o único vizinho de f em G. Logo, $\{A, B \cup \{f\}\}$ é partição de $V(G)$ em conjuntos independentes. □

1.5 Grafos direcionados

Definição 1.45. Um *grafo direcionado* (ou *digrafo*) D é formado por uma tripla consistindo de um conjunto de vértices $V(D)$, um conjunto de *arcos* $A(D)$ e uma função que associa a cada arco um par **ordenado** de vértices não-necessariamente distintos.

Definição 1.46. Para um digrafo D, se (u, v) é o par de vértices associado ao arco $a \in A(D)$, então dizemos que u e v são as *extremidades* de a. Dizemos ainda que a é um arco de u para v, que u é a *cauda* de a, que v é a *cabeça* de a, que u é *predecessor* de v e que v é *sucessor* de u.

Definição 1.47. Em um digrafo D, um *laço* é um arco em D cujas extremidades são iguais. Dizemos ainda que dois arcos são *arcos múltiplos* se ambos têm a mesma cauda e a mesma cabeça. Um digrafo D é dito *simples*, se D não possui arcos múltiplos.

Note que, pela Definição 1.47, um digrafo simples pode possuir um laço, assim como dois arcos, em sentidos opostos, entre um mesmo par de vértices.

Definição 1.48. Se D é um digrafo, então o *grafo subjacente* de D é o grafo G obtido de D ao tomarmos o mesmo conjunto de vértices e ao considerarmos os arcos de D como arestas, ou seja, pares não-ordenados de vértices.

As noções de passeio, trilha, caminho e ciclo em um digrafo D são análogas, apenas respeitando a orientação do arcos. Ou seja, por exemplo, se $P = v_1, a_1, v_2, \ldots, a_{n-1}, v_n$ é um caminho em D, então o arco a_i é associado ao par (v_i, v_{i+1}), para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Vale ressaltar que alguns autores preferem denotar um ciclo em um grafo direcionado por *circuito*. As noções de subgrafo e isomorfismo também são análogas.

Com respeito à matriz de incidência M de um digrafo D, a mudança com relação ao caso não direcionado é que se u é cauda de a, então a posição $M[a, u]$ é preenchida com -1, enquanto que se v é cabeça de a, então a posição $M[a, v]$ é preenchida com $+1$.

Com relação à conectividade de um digrafo, há uma diferença considerável já que a existência de um (u, v)-caminho não implica na existência de um (v, u)-caminho.

Definição 1.49. Um digrafo D é *(fracamente) conexo* se seu grafo subjacente for conexo. O mesmo é *fortemente conexo* se, para cada par ordenado de vértices (u, v), existir em D um caminho (direcionado) de u para v. Uma *componente fortemente conexa* de um digrafo D é um subgrafo maximal fortemente conexo de D.

Pela Definição 1.49, pode-se demonstrar que os conjuntos de vértices das componentes fortemente conexas de um digrafo D formam uma partição de $V(D)$.

Definição 1.50. Seja v um vértice em um digrafo D. O *grau de saída* $d^+_D(v)$ (resp. *grau de entrada* $d^-_D(v)$) é o número de arcos em que v é cauda (resp. v é cabeça). A *vizinhança de saída* (resp. *vizinhança de entrada*) de v é o conjunto $N^+_D(v) = \{u \mid (v, u)$ é associado a um arco de $D\}$ (resp. $N^-_D(v) = \{u \mid (u, v)$ é associado a um arco de $D\}$). Além disso, denota-se por $\delta^-_D = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists v \in V(D)\ (d^-_D(v) = k)\}$ e por $\Delta^-_D = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \exists v \in V(D)\ (d^-_D(v) = k)\}$. As definições de δ^+_D e Δ^+_D são análogas.

Quando não há ambiguidades, pode-se omitir o digrafo D das notações mencionadas na Definição 1.50.

Proposição 1.7. *Cada digrafo D satisfaz:*

$$\sum_{v \in V(D)} d^-_D(v) = \sum_{v \in V(D)} d^+_D(v) = |A(D)|.$$

Demonstração. Basta observar que cada arco contribui com exatamente uma unidade em cada um dos somatórios, já que cada arco possui exatamente uma cabeça e uma cauda. □

Alguns resultados para grafos não direcionados podem ser estendidos para o caso direcionado. Por exemplo, pode-se demonstrar uma versão do Teorema de Euler (vide Teorema 1.5, na página 16) para o caso direcionado.

Definição 1.51. Uma trilha em um digrafo D é dita *Euleriana* se é uma trilha fechada que percorre todos os arcos de D uma única vez. Um digrafo D é *Euleriano*, se D possui uma trilha Euleriana.

De modo análogo ao Lema 1.2, podemos demonstrar que:

Lema 1.3. *Se D é um digrafo tal que $\delta_D^- \geq 1$ ou $\delta_D^+ \geq 1$, então D contém um ciclo.*

Também de modo análogo à demonstração do Teorema 1.5, podemos usar o Lema 1.3 para demonstrarmos que:

Teorema 1.8. *Um digrafo D é Euleriano se, e somente se, o grafo subjacente de D tem no máximo uma componente não-trivial e se, para todo $v \in V(D)$, temos que $d_D^-(v) = d_D^+(v)$.*

Há uma diferença entre grafos direcionados e grafos orientados.

Definição 1.52. Uma *orientação* de um grafo (não-direcionado) G é um grafo direcionado D obtido de G com o mesmo conjunto de vértices e como arcos faremos a escolha de uma orientação, ou seja, um arco (x, y) ou (y, x), para cada aresta $e \in E(G)$ com $\varphi_G(e) = xy$. Um *grafo orientado* é uma orientação de um grafo simples. Um *torneio* é uma orientação de um grafo completo.

Pela Definição 1.52, note que nem todo digrafo D é um grafo orientado.

1.6 Exercícios

Questão 1.1. Prove ou mostre um contra-exemplo:

(a) [West, 1.1.4] $G \cong H$ se, e somente se, $\bar{G} \cong \bar{H}$;

(b) [West, 1.1.5] Se todo vértice de G tem grau no máximo 2, então cada componente de G é um ciclo ou um caminho;

(c) [West, 1.1.7] Um grafo com mais do que 6 vértices de grau ímpar não pode ser decomposto em 3 caminhos;

(d) [West, 1.1.12 e 25] O grafo de Petersen (veja Definição 1.37) não é bipartido, seu maior conjunto independente é 3 e ele não possui ciclo de tamanho 7;

(e) [West, 1.1.29] Em um grupo de 6 pessoas, há sempre pelo menos 3 que se conhecem mutuamente, ou pelo menos 3 que não se conhecem mutuamente;

(f) [West, 1.2.8] O grafo bipartido completo $K_{a,b}$ é Euleriano se, e somente se, a e b são números inteiros não negativos pares;

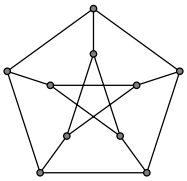


Figura 1.7: Grafo de Petersen.

(g) [West, 1.2.20] Se $v \in V(G)$ é vértice de corte (ou articulação) de um grafo simples G, então $\bar{G} - v$ é conexo;

(h) [West, 1.2.26] G é bipartido se, e somente se, cada subgrafo $H \subseteq G$ possui um conjunto independente com pelo menos $|V(H)|/2$ vértices;

(i) [West, 1.2.38] Todo grafo G com pelo menos $n(G)$ arestas contém um ciclo;

(j) [West, 1.2.40] Se P e Q são caminhos de comprimento máximo em um grafo conexo G, então P e Q possuem pelo menos um vértice em comum;

(k) [West, 1.3.1] Se u e v são os únicos vértices de grau ímpar de um grafo G, então G possui um uv-caminho;

(l) [West, 1.3.12] Todo grafo par não possui pontes;

(m) [West, 1.3.14] Todo grafo simples não-trivial possui pelo menos dois vértices com o mesmo grau;

(n) [West, 2.1.2] G é uma árvore se, e somente se, G é conexo e cada aresta de G é ponte;

(o) [West, 2.1.18] Toda árvore possui pelo menos $\Delta(G)$ folhas;

(p) [West, 2.1.30] Se uma árvore não-trivial T é tal que todo vértice adjacente a uma folha tem grau pelo menos 3, então T possui duas folhas com um vizinho em comum;

(q) [West, 2.1.32] Uma aresta $e \in E(G)$ é ponte de um grafo conexo G se, e somente se, e pertence à todas as árvores geradoras de G.

(r) [West, 1.4.3] Todo u, v-passeio em um digrafo D contém um u, v-caminho.

(s) [West, 1.4.5] Se D é um digrafo tal que $d_D^-(v) = d_D^+(v)$, para todo $v \in V(D)$, então D se decompõe em ciclos.

(t) [West, 1.4.8] Existe um torneio com n vértices tal que $d_D^-(v) = d_D^+(v)$, para todo $v \in V(D)$, se, e somente se, n é ímpar.

(u) [West, 1.4.11] Em todo digrafo D existe uma componente fortemente conexa C de D que satisfaz: nenhum arco (u, v) de D é tal que $v \in V(C)$ e $u \notin V(C)$.

(v) [West, 1.4.10] D é um digrafo fortemente conexo se, e somente se, para cada partição de $V(D)$ em dois conjuntos (não vazios) S e T, há pelo menos um arco com cauda em S e cabeça em T e pelo menos um arco com cauda em T e cabeça em S.

Questão 1.2. Demonstre:

(a) o Lema 1.3; e

(b) o Teorema 1.8.

Capítulo 2

Emparelhamentos e Coberturas

Neste capítulo, é introduzida e estudada a noção de emparelhamentos em grafos. Primeiramente, apresentam-se diversos teoremas sobre emparelhamentos em grafos quaisquer e também em grafos bipartidos. Finalmente, são demonstradas algumas equivalências em grafos bipartidos que relacionam a cardinalidade de um emparelhamento máximo a outros parâmetros de cobertura de um grafo, que serão introduzidos.

2.1 Emparelhamentos

Um exemplo de aplicação de emparelhamentos no cotidiano, é a alocação de recursos. Por exemplo, para atribuir salas de aulas a professores de uma escola, considere que cada professor possui um subconjunto das salas de aula em que prefere ensinar. Logo, para um horário determinado, é necessário alocar cada professor a uma sala de aula dentre as que o mesmo prefere. Para modelar tal problema, pode-se construir um grafo bipartido com uma das partes correspondendo ao conjunto de professores e a outra ao conjunto de salas de aula. Neste grafo, há uma aresta associando um professor a uma sala, se aquela sala é uma das que o professor prefere ensinar. Note que uma solução para a atribuição de professores a salas de aula em um determinado horário, é um subconjunto de arestas do grafo associado que não compartilham extremidades e que, para cada professor, há uma aresta incidente.

Definição 2.1. $M \subseteq E(G)$ é um *emparelhamento* de G se não há laços em M e todo par de arestas distintas de M não possuem extremidades em comum.

Pela Definição 2.1, note que não há interesse, quando buscamos um emparelhamento, em analisarmos um grafo que não seja simples. Um laço nunca pode pertencer a um emparelhamento M e, em um conjunto de arestas múltiplas, no máximo uma delas pode pertencer a M. Logo, admitimos **neste capítulo que todos os grafos são simples**.

Definição 2.2. O vértice $u \in V(G)$ é *M-saturado* por um emparelhamento $M \subseteq E(G)$, se u é extremidade de alguma aresta de M. Caso contrário, o vértice é *M-insaturado*.

Note que no exemplo mencionado sobre alocação de salas de aula, busca-se um emparelhamento que sature o conjunto de vértices relativos aos professores.

Definição 2.3. $M \subseteq E(G)$ é *emparelhamento perfeito* se todos os vértices de G são M-saturados.

Definição 2.4. Um *emparelhamento maximal* M em um grafo é tal que não existe emparelhamento M' satisfazendo $M \subsetneq M'$. Um *emparelhamento máximo* M é tal que não existe emparelhamento M' em G satisfazendo $|M'| > |M|$. Denota-se por $\alpha'(G)$ a cardinalidade de um emparelhamento máximo de G.

Definição 2.5. Seja G um grafo e M um emparelhamento em G. Para dois vértices distintos $u \neq v$, dizemos que um u, v-caminho é *M-alternante* se, na sequência que forma o caminho, as arestas alternam sua pertinência em M.

Definição 2.6. Um u, v-caminho M-alternante é dito *M-aumentante* se u e v são M-insaturados.

Note que se um grafo G possui um emparelhamento M tal que existe um caminho M-aumentante em G, então certamente M não é máximo, já que se trocarmos as arestas $M \cap E(P)$ pelas arestas $E(P) \setminus M$, obtemos um novo emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$. O interessante é que esta condição também é suficiente para termos um emparelhamento máximo em um grafo qualquer, como demonstrado por Claude Berge. Para tanto, precisamos introduzir mais algumas definições e um resultado preliminar.

Definição 2.7. Se G e H são grafos com o mesmo conjunto de vértices V, então a *diferença simétrica* de G por H, denotado por $G\Delta H$, é o grafo com conjunto de vértices V e tais que as arestas são todas as arestas que aparecem em exatamente um grafo (ou em G ou em H).

Ainda sobre diferença simétrica, como consideramos neste capítulo que os grafos são simples, podemos considerar o conjunto de arestas como um conjunto de subconjuntos com dois elementos do conjunto de vértices. Logo, a diferença simétrica de dois emparelhamentos é bem definida: se M e M' são emparelhamentos de um grafo G, então $M\Delta M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$.

Proposição 2.1. *Se M_1 e M_2 são emparelhamentos de G, então o subgrafo gerador de G com arestas em $M_1\Delta M_2$ é união de caminhos e ciclos pares.*

Demonstração. Seja G^* o subgrafo gerador de G cujo conjunto de arestas é $M_1\Delta M_2$. Pela definição de emparelhamento, observamos que $\Delta(G^*) \leq 2$. Logo, G^* é união de caminhos e ciclos. Como as arestas em um ciclo precisam alternar entre M_1 e M_2, deduzimos que os ciclos são pares, caso existam. □

Teorema 2.1 (Berge, 1957)**.** *$M \subseteq E(G)$ é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não possui caminhos M-aumentantes.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha, por absurdo, que M é um emparelhamento máximo de G e que P é um caminho M-aumentante em G. Trocando as arestas em $M \cap E(P)$ pelas arestas $E(P) \setminus M$, obtemos um novo emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$, contradizendo o fato de que M é máximo.

($\Leftarrow$) Por absurdo, seja M um emparelhamento em G que não possui caminhos M-aumentantes e seja M' um emparelhamento em G tal que $|M'| > |M|$. Seja G^* o subgrafo gerador de G cujo conjunto de arestas é $M'\Delta M$. Pela Proposição 2.1, sabe-se que cada componente de G^* é um caminho ou um ciclo par. Como G não possui caminhos M-aumentantes, deduzimos que não há u, v-caminho ímpar em G^* que comece (e termine) com arestas de M'. Logo, as componentes de G^* são:

1. Ciclos pares; ou

2. Caminhos pares; ou

3. Caminhos ímpares que começam (e terminam) com arestas de M.

Portanto, somando as arestas de cada componente, temos que $|M| \geq |M'|$. Isso contradiz a hipótese que $|M'| > |M|$. □

Note que se M é um emparelhamento em um grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, então $|M| \leq \min\{|A|, |B|\}$. Para grafos bipartidos, há também uma condição necessária e suficiente para que um emparelhamento sature uma das partes da bipartição $\{A, B\}$ de G (e, neste caso, é também é máximo já que atinge o limitante superior $\min\{|A|, |B|\}$):

Teorema 2.2 (Hall, 1935)**.** *Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido. Então, G possui emparelhamento que satura A se, e somente se:*

$$\textit{para todo } S \subseteq A\textit{, temos que } |N(S)| \geq |S| \qquad \textit{(Condição de Hall).}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja M um emparelhamento que satura A e seja $S \subseteq A$. Como M satura A, temos que M satura todos os vértices de S. Logo, cada vértice em S possui um vizinho em $N(S)$ associado (por M) apenas a ele. Portanto, $|N(S)| \geq |S|$.

($\Leftarrow$) Por absurdo, suponha que:

(I) para todo $S \subseteq A$ temos que $|N(S)| \geq |S|$; e

(II) M é um emparelhamento máximo de G que não satura A.

Seja $u \in A$ um vértice M-insaturado. Por (I), u não pode ser isolado. De fato, caso contrário, teríamos $S = \{u\}$ com $N(S) = \varnothing$ e, portanto, $|S| > |N(S)|$.

Seja $S \subseteq A$ o conjunto de vértices $v \in V(G)$ tais que existe em G algum u, v-caminho M-alternante. Ou seja, S é formado pelos vértices "alcançáveis" a partir de u por caminhos M-alternantes (note que não tais caminhos não são maximais e que subcaminhos de um caminho M-alternante são também M-alternantes).

Note que, como há caminho alternante de u para cada vértice $w \in S$, temos que cada vértice de S é M-saturado e, portanto, $|N(S)| \geq |S|$. Suponha que existe $z \in B$ tal que $z \in N(S)$ e z é M-insaturado. Note que z não existe, pois teríamos um u, z-caminho M-aumentante e, como M é máximo, pelo Teorema 2.1 tal caminho não existe.

Consequentemente, $|N(S)| = |S|$. Finalmente, como G não possui caminhos M-aumentantes, $N(\{u\}) \subseteq N(S)$. Logo, $|N(S \cup \{u\})| = |N(S)| = |S \cup \{u\}| - 1$. Portanto, $S' = S \cup \{u\}$ contradiz a condição de Hall. Absurdo! □

Se notarmos que a condição de Hall é satisfeita em grafos bipartidos regulares, o Teorema 2.2 implica que:

Teorema 2.3 (Frobernius, 1917)**.** *Se G é bipartido k-regular e $k \geq 1$, então G possui emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Como $G = (A \cup B, E)$ é bipartido, cada aresta em $E(G)$ possui uma extremidade em A e outra em B. Logo, como G é k-regular, temos que:

$$|E(G)| = m(G) = k|A| = k|B|.$$

Consequentemente, $|A| = |B|$.

Devemos mostrar que existe um emparelhamento que satura A (já que $|A| = |B|$, isso implica que tal emparelhamento é perfeito).

Seja $S \subseteq A$ arbitrário. Como G é k-regular, o número de arestas com uma extremidades em S é $k|S|$, enquanto que o número de arestas com uma extremidade em $N(S)$ é $k|N(S)|$. Todas as $k|S|$ arestas que incidem em algum vértice de S tem a outra extremidade em $N(S)$. Portanto, $k|S| \leq k|N(S)|$. Deduzimos que $|S| \leq |N(S)|$ e o resultado segue pelo Teorema 2.2. □

Ainda sobre emparelhamentos perfeitos, há uma generalização desta noção conhecida como um k-fator.

Definição 2.8. Um *k-fator* é uma subgrafo gerador k-regular de G.

Note que um 1-fator em G corresponde a um emparelhamento perfeito em G, apesar de que, formalmente, um 1-fator é um subgrafo, enquanto que um emparelhamento é um subconjunto de arestas. Há também uma condição necessária e suficiente para um grafo possuir um 1-fator:

Teorema 2.4 (Tutte, 1947)**.** *Um grafo G possui um 1-fator se, e somente se, $o(G-S) \leq |S|$, para todo $S \subseteq V(G)$, onde $o(G-S)$ é o número de componentes de ordem ímpar em $G-S$.*

2.2 Coberturas

A seguir, definimos outros parâmetros relacionados a cobertura de arestas por vértices e de vértices por arestas de um dado grafo G. Mostramos também a relação entre esses parâmetros e as cardinalidades de um maior conjunto independente e de um maior emparelhamento em um grafo (bipartido) G.

Definição 2.9. Uma *cobertura por vértices* é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que para todo $e \in E(G)$, e possui (pelo menos) uma extremidade em S. A cardinalidade de uma cobertura por vértices mínima é denotada por $\beta(G)$.

Note que se S é uma cobertura por vértices, não há arestas entre dois vértices de $\bar{S} = V(G) \setminus S$. Logo:

Proposição 2.2. *Para todo G, temos $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.*

Demonstração. Seja S um conjunto independente, então toda aresta é incidente a pelo menos um vértice de $V(G) \setminus S$. Se $V(G) \setminus S$ cobre todas as arestas de G, então não há arestas com extremidades em S. Logo, todo conjunto máximo independente é o complemento de uma cobertura por vértices mínima. Portanto, temos que $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$. □

A Proposição 2.2 relaciona o tamanho de uma cobertura por vértices mínima ao de um conjunto independente máximo de um grafo arbitrário. Para um grafo bipartido G, uma cobertura por vértices mínima também se relaciona a um emparelhamento máximo de G:

Teorema 2.5 (König-Egerváry, 1931)**.** *Se G é bipartido, então $\alpha'(G) = \beta(G)$.*

Demonstração. Note que $\beta(G) \geq \alpha'(G)$ para qualquer grafo G, já que para cada aresta de um emparelhamento, ao menos uma de suas extremidades deve pertencer a qualquer cobertura por vértices. Devemos mostrar que se $G = (A \cup B, E)$ é bipartido, então $\alpha'(G) \geq \beta(G)$. Seja $S \subseteq V(G)$ uma cobertura por vértices mínima, ou seja, $|S| = \beta(G)$.

Seja $R = A \cap S$ e $T = B \cap S$. Sejam H_1 e H_2 os subgrafos induzidos por $(R \cup (B \setminus T))$ e $(T \cup (A \setminus R))$. Vamos encontrar emparelhamentos M_1 em H_1 e M_2 em H_2 que saturam R e T, respectivamente.

Seja $S' \subseteq R$. Note que $|N(S')| \geq |S'|$, pois senão poderíamos encontrar uma cobertura por vértices menor em $S^* = (S \setminus S') \cup N(S')$, de cardinalidade menor que S. De fato, $|S^*| < |S|$, pois, por hipótese, temos que $|N(S')| < |S'|$ e S^* seria cobertura, já que as arestas cobertas por S' seriam ainda cobertas por $N(S')$ ou por T.

Pelo Teorema 2.2, H_1 possui emparelhamento que satura R. Analogamente para T, deduzimos que H_2 possui emparelhamento que satura T. Como esses emparelhamentos não compartilham extremidades, $M_1 \cup M_2$ é emparelhamento de G. Além disso, $|M_1 \cup M_2| = \beta(G)$ e $\alpha'(G) \geq |M_1 \cup M_2| = \beta(G)$. □

Definição 2.10. Uma *cobertura por arestas* é um subconjunto $L \subseteq E(G)$ tal que para todo $u \in V(G)$ é extremidade de (pelo menos) uma aresta em L. A cardinalidade da menor cobertura por arestas é denotada por $\beta'(G)$.

Teorema 2.6 (Gallai, 1959)**.** *Se G não possui vértices isolados, então* $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$.

Demonstração. Para mostrar que $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$, devemos provar que:

(i) $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq n(G)$; e

(ii) $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq n(G)$.

Para (i), vamos mostrar que $\beta'(G) \leq n(G) - \alpha'(G)$. Seja M um emparelhamento máximo. Precisamos encontrar uma cobertura por arestas L tal que $|L| \leq n(G) - |M|$. Tome L adicionando a M uma aresta para cada vértice insaturado. Observe que $|L| = n(G) - |M|$. Logo, $\beta'(G) \leq n(G) - |M| = n(G) - \alpha'(G)$.

Para (ii), seja L uma cobertura por arestas mínima. Devemos encontrar um emparelhamento M tal que $|M| \geq n(G) - |L|$.

Como L é cobertura mínima, o subgrafo formado pelas arestas de L não possui caminhos com 4 vértices (observe que a aresta central poderia ser removida), nem ciclos (uma aresta arbitrária de um ciclo poderia ser removida). Logo, tal subgrafo é uma galáxia, ou seja, uma floresta onde cada componente é uma estrela (árvore com no máximo um vértice de grau maior que 1). Como esse subgrafo é uma floresta, deduzimos que $|L| = n - k$, onde k é a quantidade dessas componentes.

Então, ao escolhermos uma aresta de cada componente para formarmos M, temos que:

$|M| = k$, o que implica, $|L| = n - |M|$. Ou seja, $\beta'(G) = n(G) - |M| \geq n(G) - \alpha'(G)$. □

Corolário 2.1. *São verdadeiras:*

(I) $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

(II) $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$*, para G sem vértices isolados.*

(III) $\alpha'(G) = \beta(G)$*, para G bipartido.*

Corolário 2.2 (König, 1916)**.** *Se G é bipartido e não possui vértices isolados, então* $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Demonstração. Seja G um grafo bipartido que não possui vértices isolados, pelo Corolário 2.1, por (I) e (II), temos que $\alpha(G) + \beta(G) = \alpha'(G) + \beta'(G)$. Por (III), deduzimos que $\alpha(G) = \beta'(G)$. □

2.3 Exercícios

Questão 2.1. Prove ou mostre um contra-exemplo:

(a) [West, 3.1.3] Seja $S \subseteq V(G)$ um conjunto de vértices saturados por um emparelhamento M em G. Então, existe um emparelhamento máximo de G que satura todos os vértices em S.

(b) [West, 3.1.8] Toda árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.

(c) [West, 3.1.9] Todo emparelhamento maximal em um grafo G tem pelo menos $\alpha'(G)/2$ arestas.

(d) [West, 3.1.7] G é bipartido se, e somente se, $\alpha(H) = \beta'(H)$, para todo $H \subseteq G$ tal que H não possui vértices isolados.

(e) [West, 3.1.13] Sejam M e M' emparelhamentos em um grafo bipartido $G = (X \cup Y, E)$ tais que M satura $S \subseteq X$ e M' satura $T \subseteq Y$. Então, existe um emparelhamento em G que satura $S \cup T$.

(f) [West, 3.1.22] Um grafo bipartido G possui um emparelhamento perfeito se, e somente se, para todo $S \subseteq V(G)$ temos que $|N(S)| \geq |S|$.

(g) [West, 3.1.40] Se G é bipartido, $\alpha(G) = n(G)/2$ se, e somente se, G possui um emparelhamento perfeito.

(h) [West, 3.3.26] Seja M um emparelhamento em um grafo G e $u \in V(G)$ um vértice M-insaturado. Se não existe caminho M-aumentante com extremidade em u, então existe emparelhamento máximo M' de G tal que u é M'-insaturado.

(i) [West, 3.3.4] Um grafo bipartido k-regular pode ser decomposto em r-fatores se, e somente se, r divide k.

(j) [West, 3.3.8] Se um grafo G se decompõe em 1-fatores, então G não possui articulação.

Questão 2.2 (West, 3.1.31)**.** Use o Teorema de König-Egerváry para demonstrar o Teorema de Hall.

Capítulo 3

Conectividade

O estudo de conectividade em grafos pode ser de interesse no contexto de várias aplicações práticas. Por exemplo, para saber qual a menor quantidade de roteadores em uma rede de computadores que precisam falhar, para que a rede se torne desconectada, ou seja, para algum par de computadores não há como enviar dados de um para o outro. Um outro exemplo seria qual a menor quantidade de estradas que devem ser interditadas para desconectar duas cidades de uma região.

Portanto, modelaremos tais redes (de computadores, de transporte, etc.) com grafos e estaremos interessados no menor subconjunto de vértices ou arestas cuja remoção desconecta o grafo. Tais conceitos são formalizados e estudados a seguir.

Tanto na remoção de vértices, como de arestas ou arcos, é irrelevante a presença de laços para verificamos a conexidade de um grafo. **Então, neste capítulo, nenhum grafo possui laços**.

3.1 Conectividade em Vértices

Deve-se lembrar primeiramente da Definição 1.35 (vide Página 14) que um vértice de corte $v \in V(G)$ (também conhecido como articulação) em um grafo G é tal que $G - v$ *possui mais* componentes que G.

Definição 3.1. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um *separador* ou *corte de vértices*, se $G - S$ possui mais de uma componente ou tem apenas um vértice.

Note que se v é uma articulação, então $\{v\}$ é um separador de G. Porém, note que se G já for um grafo desconexo, então não é necessariamente verdade que se $\{v\}$ é um separador de G, então v é articulação de G. De fato, note que o subconjunto $S = \emptyset$ é um separador em um grafo desconexo.

Note também que qualquer subconjunto com $n(G) - 1$ vértices é um separador de G. No caso de G ser um grafo completo, estes são seus únicos separadores.

Definição 3.2. A *conectividade (em vértices)* de um grafo G é definida como $\kappa(G) = min\{|S| \mid S \text{ é separador de } G\}$.

Note que a conectividade de um grafo G é zero se, e somente se, G é desconexo. Neste caso, o separador mínimo é o conjunto vazio. Note também que a conectividade de G é igual a um se, e somente se, G possui articulação. Como dito anteriormente, com respeito a grafos completos, $\kappa(K_n) = n-1$. Também pode-se provar que $\kappa(G) = n(G)-1$

se, e somente se, G é completo. Além disso, observe que a vizinhança de cada vértice v em um grafo G é um separador de G, logo $\kappa(G) \leq \delta(G)$.

Definição 3.3. G é k-conexo (em vértices) se $\kappa(G) \geq k$.

A hipótese de que um grafo é k-conexo é usada sobretudo da seguinte forma: se G é k-conexo, para algum inteiro $k \geq 1$, então G não possui um separador S tal que $|S| \leq k - 1$.

3.1.1 Grafos com $\kappa(G) = 1$

Definição 3.4. Um *bloco* em um grafo G é um subgrafo maximal conexo que não possui articulações.

Proposição 3.1. *Se B_1 e B_2 são blocos distintos de G, então:*

$$|V(B_1) \cap V(B_2)| \leq 1.$$

Demonstração. Por absurdo, suponha que u e v são vértices distintos em $V(B_1) \cap V(B_2)$. Vamos provar que $G[V(B_1) \cup V(B_2)] = G^*$ é um subgrafo de G sem articulações, contradizendo a maximalidade de B_1 e B_2. Note que u não é articulação em G^*, pois como B_1 e B_2 são blocos, então u não é articulação de B_1, nem de B_2. Logo, em $G^* - u$, todos os vértices de $B_1 \setminus \{u\}$ e de $B_2 \setminus \{u\}$ continuam conectados a v, já que $v \in V(B_1) \cap V(B_2)$. Portanto, $G^* - \{u\}$ é conexo.

De modo análogo, $G^* \setminus \{v\}$ é conexo. Além disso, $G^* - \{w\}$, com $w \neq \{u, v\}$, também é conexo, já que w não era articulação nem de B_1, nem de B_2 e, portanto, todos os vértices de $G^* - \{w\}$ continuam conectados a u e a v. □

Note que o subgrafo de um grafo G que possui apenas um vértice $v \in V(G)$ não possui articulações. Logo, todo vértice de G pertence a algum bloco de G. Note também que se G é um grafo conexo e sem articulações, então G é um bloco (e o único bloco de G).

Definição 3.5. Para um grafo G, o *grafo de blocos* $H = (A \cup B, E)$ de G é o grafo bipartido obtido de G tal que:

(a) para cada articulação $a_i \in V(G)$, criamos um novo vértice $a_i \in V(H)$ e o adicionamos ao subconjunto A;

(b) para cada bloco B_j de G cria-se um vértice $b_j \in V(H)$ que é adicionado também ao conjunto B;

(c) cria-se uma aresta $a_i b_j \in E(H)$ se, e somente se, a_i é uma articulação de G que pertence ao bloco B_j.

Proposição 3.2. *Se $H = (A \cup B, E)$ é grafo de blocos de um grafo G, então H é uma floresta.*

Demonstração. Por absurdo, seja $C = a_1 b_1, \ldots, a_r b_r a_1$ um ciclo em H, com $a_i \in A$ e $b_i \in B$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Vamos provar que se B_i é o bloco relativo a b_i, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, então $G' = G[\bigcup_{i \in \{1,\ldots,r\}} V(B_i)]$ é um subgrafo conexo e sem articulações de G, contradizendo a maximalidade de cada B_i.

Devido ao ciclo C, G' é conexo. Por absurdo, suponha que $x \in V(B_i)$ é uma articulação de G', para algum $i \in \{1, \ldots, r\}$. Logo, em $G' - x$ há um par de vértices

$u, v \in V(G') \setminus \{x\}$ tais que em $G' - x$ não existe u, v-caminho. Se ambos u e v não pertencem a $V(B_i)$, note que, devido ao ciclo C, existe um u, v-caminho que não contém vértices de B_i. Se u e v são ambos vértices de $V(B_i)$, como B_i é um bloco, $B_i \setminus \{x\}$ é conexo. Logo, existe em B_i um u, v-caminho que não contém x. Finalmente, se $u \in V(B_i)$ e $v \in V(B_j)$, para algum $j \neq i$, mesmo que x seja uma articulação de B_i, digamos a_i (resp. a_{i+i}), há ainda um u, v-caminho em C que passa pela articulação a_{i+1} (resp. a) que evita x. Logo, G' é conexo e não possui articulações, contradizendo a maximalidade de cada um dos blocos B_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$. □

Em particular, note que se G é conexo, então seu grafo de blocos é uma árvore. Tal informação é extremamente útil para demonstrações por indução no número de blocos de um grafo. Como o grafo de blocos é uma árvore, pode-se definir a noção de bloco-folha:

Definição 3.6. Um bloco B de G é dito *bloco-folha* se G possui exatamente uma articulação $a \in V(B)$.

Logo, no grafo de blocos de um grafo conexo G que possui ao menos uma articulação (ou seja, seu grafo de blocos possui ao menos três vértices), temos ao menos dois vértices relativos a blocos-folha, pelo Teorema 1.6 (vide página 17).

3.1.2 Grafos com $\kappa(G) \geq 2$

Lembre que uma ponte em G é uma aresta cuja remoção aumenta o número de componentes conexas de G (vide Definição 1.36 na Página 14).

Lema 3.1. *Se G é 2-conexo, então G não possui pontes.*

Demonstração. Por absurdo, seja G um grafo 2-conexo e $e \in E(G)$ uma ponte de G. Sejam u e v as extremidades de e. Pela Definição 3.3, temos que G é conexo e $n(G) \geq 3$. Note que como $G - e$ é desconexo, não há outras arestas (múltiplas) com as mesmas extremidades de e.

Sejam w e z dois vértices tais que não há w, z-caminho em $G - e$. Logo, todo w, z-caminho utiliza a aresta e. Note que se $\{w, z\} \cap \{u, v\} = \emptyset$, tanto u, quanto v são articulações de G, contradizendo o fato que G é 2-conexo. Sem perda de generalidade, suponha que $w = u$ e $z \neq v$. Neste caso, v é articulação de G, novamente contradizendo a hipótese de G ser 2-conexo. Portanto, sem perda de generalidade, deduzimos que $w = u$ e $z = v$ e o único u, v-caminho é $P = uev$. Como $n(G) \geq 3$, existe vértice $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Como a remoção de uma ponte desconecta G em duas componentes, suponha que x está na mesma componente que u em $G - e$. Observe que a remoção de u desconecta x e v, já que a existência de um v, x-caminho em $G - u$ implicaria na existência de um v, x-caminho em G que não contém u. Logo, u é articulação de G, mais uma vez contradizendo a hipótese. □

O Lema 3.1 será generalizado posteriormente pelo Teorema 3.5.

Definição 3.7. Dois u, v-caminhos P_1 e P_2 são *internamente disjuntos* se $V(P_1) \cap V(P_2) = \{u, v\}$.

Teorema 3.1 (Whitney, 1932)**.** *Seja G conexo com $n(G) \geq 3$. G é 2-conexo se, e somente se, para todos $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, existem pelo menos dois u, v-caminhos internamente disjuntos.*

Demonstração. Seja G conexo com $n(G) \geq 3$.

($\Leftarrow$) Por absurdo, suponha que para quaisquer $u, v \in V(G)$ tais que $u \neq v$ encontramos dois u, v-caminhos internamente disjuntos e que G não é 2-conexo. Como G é conexo, temos que G possui uma articulação $w \in V(G)$. Logo, $G - w$ possui componentes G_1 e G_2 tais que $u^* \in V(G_1)$ e $v^* \in V(G_2)$. Portanto, todos os u^*, v^*-caminhos em G contêm w, o que contradiz a hipótese.

($\Rightarrow$) Suponha que G é 2-conexo e sejam $u, v \in V(G)$ quaisquer tais que $u \neq v$. Por indução em $dist_G(u, v)$.

Base: Suponha que $dist_G(u, v) = 1$. Como G é 2-conexo, pelo Lema 3.1, $G - uv$ é conexo e, portanto, G possui dois u, v-caminhos internamente disjuntos.

Hipótese Indutiva: Suponha que para todos $u, v \in V(G)$ tais que $dist_G(u, v) = k - 1 \geq 1$ existem dois u, v-caminhos internamente disjuntos.

Passo Indutivo: Sejam $u, v \in V(G)$ tais que $dist_G(u, v) = k \geq 2$. Seja P um u, v-caminho mínimo e $w \in V(G)$ o antecessor de v em P. Como P é caminho mínimo, o subcaminho P' de P de u a w também é mínimo e a $dist_G(u, w) = k - 1$. Pela hipótese indutiva, sejam P_1 e P_2 dois u, w-caminhos internamente disjuntos. Como P_1 e P_2 são u, w-caminhos internamente disjuntos, não é possível que $v \in V(P_1) \cap V(P_2)$. Logo, sem perda de generalidade, suponha que $v \notin V(P_1)$ e que $P = uP_1wv$. Caso $v \in V(P_2)$, há um ciclo formado por P_1 e P_2 que contém u e v e, portanto, há dois u, v-caminhos internamente disjuntos. Suponha então que $v \notin V(P_2)$.

Como w não é articulação, já que G é 2-conexo, seja Q um u, v-caminho em $G - w$. Se Q não intersecta os vértices internos de P_1 e P_2, P e Q são dois u, v-caminhos internamente disjuntos.

Suponha então que $V(Q)$ possui interseção com $V(P_1) \cup V(P_2)$. Seja z o último (com respeito à sequência iniciada em u) vértice de Q que pertence a $V(P_1) \cup V(P_2)$. Sem perda de generalidade, suponha que $z \in P_1$. Como $z \in V(Q)$, temos que $z \neq w$. Portanto, os caminhos uP_2wv e uP_1zQv são dois u, v-caminhos internamente disjuntos em G. □

Lema 3.2 (Lema da Expansão)**.** *Seja G um grafo k-conexo e G' é obtido de G pela adição de um vértice v com pelo menos k vizinhos em G. Então, G' é k-conexo.*

Demonstração. Suponha que $\kappa(G) \geq k$, para algum inteiro positivo k. Vamos mostrar que um conjunto separador S de G' tem cardinalidade de pelo menos k. Se $v \in S$, então $S \setminus \{v\}$ é um separador de G. Como $\kappa(G) \geq k$, $|S \setminus \{v\}| \geq k$ e, portanto, $|S| \geq k + 1$. Se $v \notin S$ e $N(v) \subseteq S$, como $|N(v)| \geq k$, temos que $|S| \geq k$.

Suponha então que $v \notin S$ e que $N(v) \not\subseteq S$. Neste caso, v e $N(v) \setminus S$ estão em uma mesma componente de $G' - S$. Portanto, S é um separador de G e, então, $|S| \geq k$. □

Teorema 3.2. *Seja G um grafo com $n(G) \geq 3$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) G é conexo e não possui articulações.

(ii) $\forall u, v \in V(G)$, G possui u, v-caminhos internamente disjuntos.

(iii) $\forall u, v \in V(G)$, existe um ciclo em G contendo u e v.

(iv) $\delta(G) \geq 1$ e $\forall e, f \in E(G)$ há um ciclo que contém ambas e e f.

Demonstração. Pelo Teorema 3.1, temos (i) $\leftrightarrow$ (ii). Para provar (ii) $\leftrightarrow$ (iii), note que os ciclos contendo u e v correspondem a u, v-caminhos internamente disjuntos.

Para mostrar (iv) → (iii), sejam $u, v \in V(G)$ quaisquer, note que a condição $\delta(G) \geq 1$ implica que os vértices u e v não são isolados e, portanto, aplicamos (iv) nas arestas e e f que são incidentes a u e v. Caso $e = f$, ou seja, u e v são vizinhos, então aplica-se a hipótese a e e a qualquer outra aresta que é incidente a um terceiro vértice w para termos um ciclo que contém u e v (note que, por hipótese, $n(G) \geq 3$).

Vamos mostrar agora que (i) $\wedge$ (iii) → (iv). Como G é conexo, $\delta(G) \geq 1$. Sejam $uv, xy \in E(G)$ tais que $u, v, x, y \in V(G)$. Seja G' o grafo obtido de G ao adicionar vértices w e z, vizinhos de $\{u, v\}$ e $\{x, y\}$, respectivamente. Como G é 2-conexo, então, pelo Lema 3.2 (Lema da Expansão), temos que o grafo G' também é 2-conexo. Por (iii), existe um ciclo C em G' contendo w e z. Como w, z têm grau 2, C deverá conter os caminhos uwv e xzy, porém não usará as arestas uv ou xy. Substituindo os caminhos uwv e xzy em C pelas arestas uv e xy, temos um ciclo que passa por uv e xy em G. □

Definição 3.8. O grafo G' obtido de G pela *subdivisão* da aresta $uv \in E(G)$ é tal que $V(G') = V(G) \cup \{w\}$ e $E(G') = (E(G) \setminus \{uv\}) \cup \{uw, wv\}$.

Corolário 3.1. *Se G é 2-conexo e G' é obtido de G pela subdivisão $uv \in E(G)$, então G' também é 2-conexo.*

Demonstração. Seja G' o grafo obtido de G ao adicionar o vértice w que subdivide uv. Para mostrar que G' é 2-conexo é suficiente encontrar um ciclo que passa por arestas arbitrárias $e, f \in E(G')$, pelo Teorema 3.2.

Como G é 2-conexo, para quaisquer duas arestas de G, pelo Teorema 3.2, temos que existe um ciclo que as contém. Dados $e, f \in E(G')$, note que se $e, f \in E(G)$, em particular, o ciclo que contém essas duas arestas em G também aparece em G', a menos que tal ciclo use a aresta uv. Neste caso, basta trocar a aresta uv pelo u, v-caminho de comprimento dois que passa por w.

Sem perda de generalidade, se $e \in E(G)$ e $f \in \{uw, wv\}$, tomando o ciclo que contém as arestas e e uv, basta trocar a aresta uv pelo u, v-caminho de comprimento dois que passa por w.

Finalmente, se $\{e, f\} = \{uw, wv\}$, como existe um ciclo que passa pela aresta uv em G (lembre que se G é 2-conexo, então $n(G) \geq 3$ e $\delta(G) \geq 1$) e, consequentemente, trocamos a aresta uv pelo u, v-caminho de comprimento dois que passa por w para obtermos um ciclo em G' que contém e e f. □

Definição 3.9. Uma decomposição em *orelhas* (ou *alças*) de um grafo G é uma partição de $E(G)$ em $C, P_1, ..., P_k$ tal que:

1. C é ciclo;
2. P_i é caminho em $G[V(C) \cup ... \cup V(P_i)]$ tal que seus vértices internos têm grau igual a 2 e suas extremidades pertencem a $V(C) \cup ... \cup V(P_{i-1})$.

Teorema 3.3 (Whitney, 1932)**.** *G é 2-conexo se, e somente se, G admite decomposição em orelhas.*

Demonstração. (⇐) Como ciclos são 2-conexos, basta mostrar, por indução no número k de orelhas, que ao adicionar uma orelha a um grafo G obtemos um grafo que ainda é 2-conexo. Sejam u, v as extremidades de uma orelha P que será adicionado a um grafo G 2-conexo. Já sabemos que ao adicionar uma aresta não reduz conectividade do grafo, logo $G + uv$ é 2-conexo. A subdivisão da aresta uv aplicada $|E(P)| - 1$ vezes, converte $G + uv$ em $G \cup P$, onde P é uma orelha. Pelo Corolário 3.1, após cada subdivisão, ainda teremos um grafo 2-conexo.

($\Rightarrow$) Seja G um grafo 2-conexo. Vamos construir uma decomposição em orelhas de G a partir de um ciclo arbitrário C em G. Note que tal ciclo existe, já que $2 \leq \kappa(G) \leq \delta(G)$ (vide Lema 1.2, na Página 16). Seja $G_0 = C$. Seja G_i o subgrafo obtido por adicionar i orelhas. Se $G_i \neq G$, então podemos escolher uma aresta $uv \in G \setminus E(G_i)$ e uma aresta $xy \in E(G_i)$. Como G é 2-conexo, uv e xy estão contidos em um ciclo C'. Seja P o caminho em C' que contém uv e exatamente dois vértices de G_i, um em cada extremidade de P. Portanto, P pode ser adicionado a G_i para obter um subgrafo maior G_{i+1} tal que P é uma orelha. □

3.1.3 Grafos com $\kappa(G) \geq k$

Definição 3.10. Dados dois vértices não-adjacentes x e y em um grafo G, dizemos que $S \subseteq V(G)$ é um x, y-*separador* (ou um x, y-*corte*) se $G - S$ não possui x, y-caminho. Denota-se por

$$\kappa_G(x, y) = \min\{|S| \mid S \text{ é um } x, y\text{-separador}\}$$

e por

$$\lambda_G(x, y) = \max\{k \mid G \text{ possui } k \; x, y\text{-caminhos dois-a-dois internamente disjuntos}\}.$$

Teorema 3.4 (Menger,1927)**.** *Se x e y são vértices não-adjacentes de um grafo G, então $\kappa_G(x, y) = \lambda_G(x, y)$.*

Em particular, note que se G é um grafo de conectividade igual à k, então para quaisquer dois vértices u e v não adjacentes de G existem k u, v-caminhos internamente disjuntos.

3.2 Conectividade em Arestas

Definição 3.11. Um conjunto $F \subseteq E(G)$ é *desconectante* se $G - F$ possui mais de uma componente. A *conectividade em arestas* de G é $\kappa'(G) = min\{|F| \mid F$ é conjunto desconectante de $G\}$. G é *k-conexo em arestas* (*ou k-aresta-conexo*), se $\kappa'(G) \geq k$.

Note que, pela Definição 3.11 que pode ser encontrada em West [2001], a conectividade do grafo trivial não está definida, já que o mesmo não possui um conjunto desconectante. Já em Bondy and Murty [2008], admite-se que o grafo trivial é 0-aresta-conexo e 1-aresta-conexo, porém não é 2-aresta-conexo. **Por simplicidade, admitimos que no restante desta seção os grafos são não triviais.**

Definição 3.12. Sejam $S, T \subseteq V(G)$, $[S, T]$ é o conjunto de arestas que possui uma extremidade em S e a outra em T. Dado $\emptyset \neq S \subset V(G)$ e $\overline{S} = V(G) \setminus S$, um *corte de arestas* é um conjunto da forma $[S, \overline{S}]$.

Lema 3.3. *Se F é um conjunto desconectante minimal, então F é um corte de arestas.*

Demonstração. Seja H uma componente de $G - F$. Note que $[V(H), \overline{V(H)}] \subseteq F$ é um corte de arestas. Como todo corte de arestas é desconectante e F é desconectante minimal, então $F = [V(H), \overline{V(H)}]$. □

Teorema 3.5 (Whitney, 1932)**.** *Se G é um grafo simples, então $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.*

Demonstração. As arestas incidentes a um vértice v de grau mínimo formam um corte de arestas, logo $\kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Seja F um conjunto desconectante mínimo, ou seja, $|F| = \kappa'(G)$, $G - F$ é desconexo e, além disso, como F é mínimo, Lema 3.3 implica na existência de um subconjunto de vértices $\emptyset \neq R \subsetneq V(G)$ tal que $F = [R, \overline{R}]$. Vamos mostrar que existe $S \subseteq V(G)$ separador de G tal que $\kappa(G) \leq |S| \leq |F| = \kappa'(G)$.

Faremos dois casos:

Caso 1: Todos os vértices de R são adjacentes a todos vértices de $\overline{R}$.

Como G é simples, temos que $\delta(G) \leq n(G) - 1$. Logo, note que $\kappa(G) \leq \delta(G) \leq n(G) - 1$. Portanto, $\kappa'(G) = |F| = |R||\overline{R}| \geq n(G) - 1 \geq \kappa(G)$.

Caso 2: Existem um vértice $x \in R$ e um vértice $y \in \overline{R}$ tais que $xy \notin E(G)$.

Seja $T = (N(x) \cap \overline{R}) \cup \{u \mid u \in R \setminus \{x\} \text{ e } N_G(u) \cap \overline{R} \neq \emptyset\}$. Observe que T separa x de y, pois já que $xy \notin E(G)$ e F é um conjunto desconectante, todo $x, y - caminho$ usa um vértice em $N(x) \cap \overline{R}$ ou usa um vértice em $R \setminus \{x\}$ com algum vizinho em $\overline{R}$. Além disso, note que $|T| \leq |F|$. Note que podemos construir uma função injetiva de T para F de tal modo que associamos ao vértice $u \in T$ a aresta xu, se $u \in \overline{R}$, caso contrário uw, para algum $w \in N_G(u) \cap \overline{R}$. Portanto, $\kappa(G) \leq |T| \leq |F| = \kappa'(G)$.

□

Teorema 3.6. *Se G é 3-regular, então $\kappa(G) = \kappa'(G)$.*

Demonstração. Seja G um grafo 3-regular e S um corte de vértices mínimo, isto é, $|S| = \kappa(G)$. Já que $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$, precisamos apenas mostrar que existe de um corte de arestas de tamanho $|S|$.

Sejam H_1, H_2 duas componentes de $G - S$. Como S é corte de vértices mínimo, cada $v \in S$ tem um vizinho em H_1 e outro em H_2 (note que como G é 3-regular, é possível que exista uma terceira componente H_3 e, nesse caso, cada vértice de S também possui um vizinho em H_3). G é 3-regular, logo v não pode ter dois vizinhos em H_1 e dois em H_2. Para cada $v \in S$, removemos a aresta com extremidades em v e em um vértice de $\{H_1, H_2\}$, ao qual v tem apenas um vizinho.

Note que a remoção dessas $\kappa(G)$ arestas eliminam todos os caminhos de H_1 para H_2, exceto, possivelmente, no caso de um caminho que contém dois vértices v_1 e v_2 de S. Nesse caso, basta remover as arestas de H_1 para os vértices v_1 e v_2. □

Definição 3.13. Uma *ligação* (do inglês, *bond*) em um grafo G é um corte de arestas minimal não-vazio.

Proposição 3.3. *Se G é um grafo conexo, então o corte de arestas F é uma ligação se, e somente se, $G - F$ tem exatamente duas componentes.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $F = [S, \overline{S}]$ um corte de arestas. Suponha que $G - F$ tem exatamente duas componentes e seja F' um subconjunto próprio de F. O grafo $G - F'$ contém as duas componentes de $G - F$ e pelo menos uma aresta entre essas componentes, sendo assim conexo. Portanto, F é um conjunto desconectante minimal e é ligação.

($\Rightarrow$) Seja $F = [S, \overline{S}]$ um corte de arestas. Pela contra-positiva, suponha que $G - F$ tem mais de duas componentes. Como $G - F$ é a união disjunta de $G[S]$ e $G[\overline{S}]$, um dos subgrafos tem pelo menos duas componentes. Sem perda de generalidade, suponha que

$G[S]$ tenha pelo menos duas componentes. Seja $S = A \cup B$, ao qual não existem arestas ligando A e B. Logo, os cortes de arestas $[A, \overline{A}]$ e $[B, \overline{B}]$ são subconjuntos próprios de F, então F não é uma ligação. □

3.2.1 Grafos com $\kappa'(G) = k$

Definição 3.14. Dois u, v-caminhos P_1 e P_2 em um grafo G são *internamente disjuntos em arestas* se $E(P_1) \cap E(P_2) = \emptyset$.

Definição 3.15. Denote por

$$\kappa'_G(x, y) = \min\{|F| \mid F \subseteq E(G) \text{ e } G - F \text{ não possui } x, y\text{-caminho}\}$$

e por

$\lambda'_G(x, y) = \max\{k \mid G$ possui k x, y-caminhos dois-a-dois internamente disjuntos em arestas$\}$.

Teorema 3.7 (Elias-Feinstein-Shannon, 1956; Ford-Fulkerson, 1956)**.** *Para todo grafo G e para quaisquer vértices $x, y \in V(G)$, $\kappa'_G(x, y) = \lambda'_G(x, y)$.*

Note que arestas múltiplas são permitidas no Teorema 3.7.

3.3 Conectividade em Digrafos

Definição 3.16. Um *separador* ou *corte de vértices* $S \subseteq V(G)$ em um digrafo D é tal que $D - S$ não é fortemente conexo. $\kappa(D) = \min\{|S| \mid S$ é separador de $D\}$. D é dito *k-conexo*, se $\kappa(D) \geq k$.

Definição 3.17. Seja D um digrafo e sejam $S, T \subseteq V(D)$. Denote por $[S, T]$ o subconjunto de arcos com cauda em S e cabeça em T. Um *corte de arcos* em D é o conjunto de arcos $[S, \overline{S}]$, para algum $\emptyset \neq S \subsetneq V(D)$. A *conectividade em arcos* de D é $\kappa'(D) = \min\{|[S, \overline{S}]| \mid \emptyset \neq S \subsetneq V(D)\}$. Um digrafo é *$k$-conexo em arcos* (ou *$k$-arco-conexo*) se $\kappa'(D) \geq k$.

Note que se D é k-conexo em arcos, então, para cada $\emptyset \neq S \subsetneq V(D)$, há pelo menos k arcos com cauda em S e cabeça em $V(D) \setminus \{S\}$. De modo análogo ao Teorema 3.3, pode-se provar que:

Proposição 3.4. *Se D é um digrafo fortemente conexo e D' é o digrafo obtido de D pela adição de uma orelha direcionada a D, então D' é fortemente conexo.*

Proposição 3.5. *Um grafo G tem uma orientação fortemente conexa D se, e somente se, G é 2-conexo.*

Além disso, tanto a versão análoga em vértices, como em arcos, do Teorema de Menger (vide Teoremas 3.4 e 3.7) também são válidas em digrafos e suas demonstrações são similares.

3.4 Exercícios

Questão 3.1. Prove ou mostre um contra-exemplo:

(a) [West, 4.1.1] Todo grafo k-conexo é k-conexo em arestas.

(b) [West, 4.1.2] Se $e \in E(G)$ é uma ponte de G, então pelo menos uma das extremidades de e é uma articulação.

(c) [West, 4.1.6] Sejam $B_1, \ldots, B_k$ os blocos de um grafo G. Então, $n(G) = (\sum_{i=1}^{k} n(B_i)) - k + 1$.

(d) [West, 4.1.11] Se G é simples e $\Delta(G) \leq 3$, então $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

(e) [West, 4.1.18] Se G é livre de triângulos, $\delta(G) \geq 3$ e $n(G) \leq 11$, então G é 3-conexo em arestas.

(f) [West, 4.1.19] Se G é simples e $\delta(G) \geq n - 2$, então $\kappa(G) = \delta(G)$.

(g) [West, 4.1.32] Todos os vértices de um grafo G possuem grau par se, e somente se, todo bloco de G é Euleriano.

(h) [West, 4.1.33] Um grafo G é k-conexo em arestas se, e somente se, cada um de seus blocos é k-conexo em arestas.

(i) [West, 4.2.2] Se G é 2-conexo em arestas e G' é obtido de G pela subdivisão de uma de suas arestas, então G' é 2-conexo em arestas.

(j) [West, 4.2.4] Se P é um u, v-caminho em um grafo 2-conexo G, então existe um u, v-caminho Q que é internamente disjunto de P em G.

(k) [West, 4.2.8] G é 2-conexo se, e somente se, para toda tripla (x, y, z) de vértices distintos existe um x, z-caminho que passa por y.

(l) [West, 4.2.9] Se G é um grafo 2-conexo com pelo menos 4 vértices, então para quaisquer dois subconjuntos disjuntos $X, Y \subseteq V(G)$ tais que $|X| \geq 2$ e $|Y| \geq 2$, existem dois X, Y-caminhos internamente disjuntos.

(m) [West, 4.2.18] Se G não tem vértices isolados nem contém ciclos pares, então cada bloco de G ou é uma aresta ou um ciclo ímpar.

Questão 3.2. [West, 4.2.23] Use o Teorema de Menger para provar o Teorema de König-Egerváry, quando G é bipartido.

Capítulo 4

Coloração de Grafos

Definição 4.1. Uma *k-coloração* (de vértices) de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$. Uma k-coloração é *própria* se $c(u) \neq c(v)$, sempre que houver aresta $e = uv$.

Note que uma k-coloração própria só é bem definida em um grafo sem laços. Além disso, arestas múltiplas não trazem informações adicionais, quando se busca obter uma coloração própria de um grafo. **Portanto, neste capítulo, admite-se que os grafos são simples.**

Definição 4.2. Dado um grafo simples $G = (V, E)$, o *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor número natural k tal que G admite uma k-coloração própria. Uma k-coloração própria, onde $\chi(G) = k$, é uma *coloração ótima* de G e G é dito *k-cromático*.

Definição 4.3. Se c é uma coloração própria de G, então o conjunto $S_i = \{v \in V(G) \mid c(v) = i\}$ é uma *classe de cor*, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Note que cada classe de cor define um conjunto independente do grafo. No contexto de coloração, é mais comum nos referirmos a um conjunto independente como um *conjunto estável*.

Proposição 4.1. *$\chi(G) = k$ se, e somente se, G admite partição de $V(G)$ em k conjuntos estáveis e não admite partição em $k - 1$ destes.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por absurdo, suponha que existe uma partição $S_1, \ldots, S_{k-1}$ de $V(G)$ em conjuntos estáveis. Logo, podemos obter uma $(k-1)$-coloração própria c' de G tal que $c'(v) = i$ se, e somente se, $v \in S_i$. Isso contradiz a hipótese que $\chi(G) = k$.

Agora, como $\chi(G) = k$, seja c uma k-coloração própria de G. Uma vez que não há $(k-1)$-coloração própria, a função c é sobrejetiva. Portanto, como cada classe de cor é um conjunto estável não-vazio, a família $\{S_1, \ldots, S_k\}$ é uma partição de $V(G)$.

($\Leftarrow$) Analogamente, como G admite uma partição de $V(G)$ em k conjuntos estáveis, seja $\{S_1, \ldots, S_k\}$ essa partição. Então, obtemos uma k-coloração própria c de G tal que $c(v) = i$ se, e somente se, $v \in S_i$. Como não podemos ter uma partição com $k - 1$ conjuntos, então $\chi(G) = k$. □

De modo análogo, pode-se demonstrar que $\chi(G) \leq k$ se, e somente se, G admite partição em no máximo k conjuntos independentes. Isso nos leva ao seguinte corolário:

Corolário 4.1. *$\chi(G) \leq 2$ se, e somente se, G é bipartido.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Para $\chi(G) = 1$, por definição de coloração própria, temos que G é vazio. Portanto, G é bipartido. Para $\chi(G) = 2$, temos uma partição de $V(G)$ em 2 conjuntos estavéis. Logo, por definição, G é bipartido.

($\Leftarrow$) Como G é bipartido, temos dois conjuntos independentes que particionam $V(G)$. Podemos colorir cada conjunto com uma cor distinta, então $\chi(G) \leq 2$. □

Uma outra propriedade importante sobre coloração de grafos é demonstrada a seguir:

Proposição 4.2. *Para todo H subgrafo de G, temos que $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Demonstração. Se $c : V(G) \to \{1, \ldots, \chi(G)\}$ é coloração própria de G, então $f \restriction_{V(H)}$ é $\chi(G)$-coloração própria de H. Logo, $\chi(H) \leq \chi(G)$. □

4.1 Limitantes

Os seguintes limitantes são bem conhecidos para o número cromático:

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

A seguir, estudamos primeiro resultados relacionados ao limitante superior $\Delta(G)+1$ e depois aqueles intrínsecos ao limitante inferior $\omega(G)$.

4.1.1 O limitante $\Delta(G) + 1$

Para demonstrarmos tal limitante, podemos usar o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1: Algoritmo Guloso para Coloração de Vértices

Entrada: Um grafo G e uma ordem $\sigma = (v_1, \ldots, v_n)$ sobre $V(G)$
para $i = 1, \ldots, n$ **faça**
  $c(v_i) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+^* \mid k \notin \{c(v_j) \mid \exists j \in \{1, \ldots, i-1\}(v_j \in N(v_i))\}\}$.
fim
retorna c

O Algoritmo 1 é conhecido também como Algoritmo *first-fit*. No restante deste capítulo, sempre que nos referirmos ao Algoritmo Guloso, nos referiremos ao Algoritmo 1. Se c é uma coloração de um grafo G obtida pela execução do Algoritmo Guloso , então c é uma *coloração gulosa* de G.

Existem três parâmetros relacionados ao Algoritmo 1 definidos na literatura que definiremos a seguir.

Um grafo G é *d-degenerado* se todo subgrafo induzido $H \subseteq G$ possuir um vértice de grau no máximo d [Lick and White, 1970]. Note que, se G é d-degenerado e tem n vértices, existe uma ordem $\sigma = (v_1, \ldots, v_n)$ sobre $V(G)$ tal que v_i possui no máximo d vizinhos no conjunto $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. O menor inteiro positivo d para o qual G é d-degenerado é conhecido *degeneração* de G.

Uma noção similar foi definida por Erdős and Hajnal [1966]. O *número de coloração* (do inglês, *coloring number*) de G é o menor inteiro k tal que G admite uma ordem $\sigma = (v_1, \ldots, v_n)$ sobre $V(G)$ tal que cada vértice v_i possui menos que k vizinhos no conjunto $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, denotado por $\text{col}(G)$.

Pode-se observar G tem degeneração igual a k se, e somente se, $\text{col}(G) = k+1$ [Lick and White, 1970]. Também é bem conhecido que $\text{col}(G)$ pode ser determinado em

tempo polinomial, visto que um algoritmo que iterativamente remove vértices de menor grau e retorna o maior menor grau encontrado no processo é ótimo.

Os parâmetros anteriores visam buscar uma ordem para o Algoritmo Guloso de modo a minimizar o número de cores que o mesmo utiliza através da busca de uma ordem que minimize um limitante superior sobre o número de vizinhos já coloridos de cada vértice v_i, sobre uma dada ordem $\sigma = (v_1, \ldots, v_n)$.

Já o próximo parâmetro visa uma análise de pior caso do Algoritmo Guloso, que é uma heurística frequentemente utilizada na prática para gerar colorações próprias.

O *número guloso* (ou *número de Grundy*) de G é denotado por:

$$\Gamma(G) = \max\{k \mid G \text{ possui uma } k\text{-coloração gulosa}\}.$$

Alguns autores denotam $\Gamma(G)$ por $\chi_{FF}(G)$ (em referência à nomenclatura *first-fit*).

Teorema 4.1. *Para todo grafo simples G, temos:*

$$\chi(G) \leq \text{col}(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

onde $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$.

Demonstração. Observe que o Algoritmo Guloso atribui ao vértice v_i a menor cor que não ocorre em sua vizinhança já colorida, isto é, em $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n(G)\}$.

Seja $k = \text{col}(G)$ e seja $\sigma = (v_1 \ldots, v_n)$ uma ordem sobre $V(G)$ tal que v_i tem no máximo $k - 1 \leq \Delta(G)$ vizinhos em $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$. Note que o Algoritmo Guloso, ao receber G e σ como entrada, retornará uma k-coloração gulosa própria de G, sendo $k \leq \Delta(G) + 1$. Portanto, $\chi(G) \leq \text{col}(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$. □

O limitante superior $\Delta(G) + 1$ pode facilmente não ser atingido. Basta tomarmos uma estrela com $n + 1$ vértices, ou seja, uma árvore com n folhas. É um grafo bipartido (e, portanto, seu número cromático é 2), porém seu grau máximo é n.

Em seguida, estudamos quais são os grafos que atingem esse limitante superior. Para tanto, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 4.1. *Para todo grafo conexo G e todo vértice $v \in V(G)$, existe uma ordem $\sigma = v_1, \ldots, v_n$ sobre $V(G)$ tal que $v = v_n$ e todo vértice v_i tem pelo menos um vizinho v_j com $j > i$, para todo $i \in \{1, \ldots, v_{n-1}\}$.*

Demonstração. Se G possui apenas um vértice, tome $\sigma = v$. Caso contrário, como G é conexo, seja T uma árvore geradora de G (note que T existe, pois T pode ser obtida de G pela sucessiva remoção de arestas que pertençam a pelo menos um ciclo de G). Seja v_1 uma folha de T tal que $v_1 \neq v$. Note que como $n(G) = n(T) \geq 2$, T possui pelo menos duas folhas, logo v_1 está bem definido. Tome v_2 como uma folha em $T - v_1$ distinta de v, caso exista, e assim sucessivamente. Por último, faça $v_n = v$.

Note que, pela construção, cada v_i é folha na árvore $T - \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, ou seja, cada v_i possui um vizinho em $T - \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, e portanto em G, no conjunto $v_{i+1}, \ldots, v_n$, para todo $i \in \{1, \ldots, n(G) - 1\}$. □

Lema 4.2. *Seja G um grafo 2-conexo, não-completo e k-regular, para algum $k \geq 3$. Então, existem três vértices $v_1, v_2, v_n \in V(G)$ tais que $v_1v_2 \notin E(G)$, $v_1v_n \in E(G)$ e $v_2v_n \in E(G)$, e $G - \{v_1, v_2\}$ é conexo.*

Demonstração. Como G é 2-conexo e não é completo, note que $n(G) \geq 3$. Seja $x \in V(G)$.

Caso 1: $G - x$ é 2-conexo.

Como G não é completo e é k-regular, então existe $y^* \in V(G)$ tal que $xy^* \notin E(G)$. Além disso, como G é conexo, então existe $y \in V(G)$ tal que $xy \notin E(G)$ e $dist_G(v_1, v_2) = 2$ (basta tomar um x, y^*-caminho mínimo). Seja $w \in N_G(x) \cap N_G(y)$.

Como $G - x$ é 2-conexo, então $G - x, y$ é conexo. Logo, basta tomarmos $\{x, y\} = \{v_1, v_2\}$ e $w = v_n$.

Caso 2: $\kappa(G - x) \leq 1$.

Como G é 2-conexo, então $G - x$ é conexo, e, portanto $\kappa(G - x) \geq 1$. Como G não é completo, note que $n(G - x) \geq 3$ e, portanto, $G - x$ possui articulação.

Ainda pela hipótese de G ser 2-conexo, deduzimos que x possui ao menos um vizinho em cada bloco correspondente a uma folha da árvore de decomposição em blocos (caso contrário, uma articulação de $G - x$ seria uma articulação em G, que é 2-conexo).

Como toda árvore tem pelo menos duas folhas. Sejam v_1 e v_2 dois destes vizinhos, como v_1 e v_2 não são articulações e pertencem a blocos distintos, $v_1v_2 \notin E(G)$. Além disso, note que $\{v_1, v_2\}$ não desconecta $G - x$, uma vez que são vértices em blocos correspondentes a folhas da decomposição de $G - x$ e também note que, já que G é k-regular para $k \geq 3$, x possui ao menos 3 vizinhos. Ou seja, x possui outro vizinho distinto de v_1 e v_2. Logo, $G - \{v_1, v_2\}$ é conexo e, ao tomarmos $x = v_n$, satisfazemos a afirmação. □

Teorema 4.2 (Brooks, 1941)**.** *Seja G um grafo conexo e simples. Então, $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ se, e somente se, G é completo ou G é um ciclo ímpar.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Note que se G é um grafo completo, então $\chi(G) = n(G) = \Delta(G) + 1$. No caso em que G é um ciclo ímpar, observe que $\chi(G) = 3 = \Delta(G) + 1$.

($\Rightarrow$) Pela contra-positiva, suponha que G não é completo e nem um ciclo ímpar. Devemos mostrar que G admite uma $\Delta(G)$-coloração própria. Para tanto, analisamos os seguintes casos.

1. $\Delta(G) \leq 2$.

   Note que, como G é conexo e não é completo, deduzimos que $\Delta(G) = 2$. Além disso, como G não é um ciclo ímpar, G é conexo e $\Delta(G) = 2$, então G ou é um caminho ou um ciclo par. Em ambos os casos, G admite uma 2-coloração própria.

2. $\Delta(G) \geq 3$.

   (a) G não é $\Delta(G)$-regular.

   Seja v_n tal que $d_G(v_n) < \Delta(G)$. Seja σ uma ordem obtida pelo Lema 4.1 de modo que v_n seja o último da ordem. Como cada vértice v_i tem um vizinho v_j, $j > i$, ao executarmos o Algoritmo Guloso nesta ordem, o mesmo atribuirá a v_i uma cor menor ou igual a $\Delta(G)$. Como $d(v_n) < \Delta(G)$, v_n também será colorido pelo Algoritmo Guloso com uma cor menor ou igual a $\Delta(G)$. Logo, o Algoritmo Guloso produzirá uma $\Delta(G)$-coloração própria de G.

   (b) G é $\Delta(G)$-regular.

   i. G possui articulação. Seja u a articulação de G. Sejam $C_1, ..., C_k$ as componentes de $G - u$. Seja $G_1 = [V(C_1) \cup \{u\}]$ e $G_2 = [V(C_2) \cup$

... ∪ $V(C_k)$ ∪ $\{u\}$]. Note que G_1 e G_2 não são k-regulares, já que $d_{G_1}(v) < k$ e $d_{G_2}(v) < k$. Aplicando raciocínio análogo ao caso anterior, é possível construirmos ordens σ_1 e σ_2 sobre G_1 e G_2, respectivamente, usando o Lema 4.1 e usarmos tais ordens para obtermos $\Delta(G)$-colorações próprias c_1 e c_2 de G_1 e G_2, respectivamente. Note que se $c_1(v) \neq c_2(v)$, então podemos trocar os nomes das cores em c_1 de modo que $c_1(v) = c_2(v)$. Finalmente, observe que a união $c_1 \cup c_2$ (lembre que c_1 e c_2 são funções e, portanto, conjuntos de pares ordenados) é uma coloração própria para G com $\Delta(G)$ cores.

ii. G é 2-conexo. Pelo Lema 4.2, usamos a mesma ideia anterior em $G - \{v_1, v_2\}$ para construirmos uma ordem $v_3, ..., v_n$ de modo que cada vértice v_i, para $i = \{3, ..., n-1\}$, possua ao menos um vizinho em $v_{i+1}, ..., v_n$. Portanto, ao colocarmos v_1 e v_2 no início essa ordem e aplicarmos o Algoritmo Guloso, veja que, pelo mesmo argumento anterior, os vértices $v_3, ..., v_{n-1}$ tem cor no máximo $\Delta(G)$ e, como a cor de v_1 e v_2 será a cor 1, v_n possuirá no máximo $\Delta(G) - 1$ cores em sua vizinhança. Logo, o Algoritmo Guloso retornará uma $\Delta(G)$-coloração própria de G.

□

4.1.2 O limitante ω

Proposição 4.3. *Seja G um grafo simples, então $\chi(G) \geq \omega(G)$ e $\chi(G) \geq \frac{n(G)}{\alpha(G)}$, onde $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique e $\alpha(G)$ é o tamanho do maior conjunto independente.*

Demonstração. Como quaisquer dois vértices de uma clique são adjacentes. Logo, os mesmos induzem em G um subgrafo completo com $\omega(G)$ vértices. Pela Proposição 4.2, temos que $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Pela Proposição 4.1, note que uma k-coloração de G corresponde a uma partição de $V(G)$ em k conjuntos independentes, onde, por definição, cada um possui cardinalidade no máximo $\alpha(G)$. Logo, $n(G) = |V(G)| \leq k \cdot \alpha(G)$. A desigualdade segue ao tomarmos uma coloração ótima onde $k = \chi(G)$. □

Um ciclo ímpar com pelo menos 5 vértices é um primeiro exemplo de que o limitante inferior não é sempre satisfeito na igualdade, já que $\chi(C_{2k+1}) = 3$, enquanto que $\omega(C_{2k+1}) = 2$, para todo $k \geq 1$. Logo, a questão natural é de saber se há algum limitante superior para $\chi(G)$ na forma $\omega(G) + c$, para alguma constante c. A resposta é negativa. Para tanto, vamos apresentar uma família de grafos $\mathcal{G}$ tal que $\omega(G) = 2$, para todo $G \in \mathcal{G}$, porém não existe $k \in \mathcal{Z}$ tal que $\chi(G) \leq k$, para todo $G \in \mathcal{G}$.

Definição 4.4. A *construção de Mycielski* constrói de uma classe enumerável de grafos sem triângulos $\mathcal{G} = \{G_1, G_2 \ldots\}$ tais que $\chi(G_i) = i + 1$. A construção é recursiva:

- $G_1 = K_2$;
- Se $G_i \in \mathcal{G}$, então G_{i+1} é o grafo obtido de G_i da seguinte forma:

$$V(G_{i+i}) = V(G_i) \cup \{v_i' \mid v_i \in V(G_i)\} \cup \{w_{i+1}\}$$

e

$$E(G_{i+1}) = E(G_i) \cup \{uv_i' \mid i \in \{1, \ldots, n(G_i)\} \text{ e } u \in N_{G_i}(v_i)\} \cup \{v_i' w_{i+1} \mid i \in \{1, \ldots, n(G_i)\}\}.$$

Definição 4.5. O *grafo de Grötzsch* é o grafo G_3 de Mycielski, isto é, o grafo obtido a partir de C_5 pela construção de Mycielski.

Teorema 4.3 (Mycielski, 1955)**.** *Para cada $i \in \mathbb{Z}_+^*$, temos que $G_i \in \mathcal{G}$ é sem triângulos e $\chi(G_i) = i + 1$.*

Demonstração. Por indução em i. No caso base, note que G_1 é o grafo completo com 2 vértices, que é sem triângulos e seu número cromático é 2. Suponha então que G_i é sem triângulos e que $\chi(G_i) = i + 1$, para algum inteiro $i \geq 1$.

Considere G_{i+1}, como apresentado na Definição 4.4.

Seja $V' = \{v'_1, ..., v'_{n(G_i)}\}$. Pela construção, V' é um conjunto independente de G_{i+1}. Pela hipótese indutiva, não há triângulos em G_i. Note que nenhum triângulo em G_{i+1} contém o vértice w_{i+1}, já que $N_{G_{i+1}}(w_{i+1}) = V'$ e V' é um conjunto independente. Se existe triângulo que contém algum $v'_i \in V'$, pela construção de Mycielski, note que os vizinhos de v'_i em tal triângulo são vértices de $V(G_i)$. Porém, pela construção, tais vértices são vizinhos do vértice v_i. Portanto, G_i conteria um triângulo, contradizendo a hipótese indutiva. Logo G_{i+1} não possui triângulos.

Seja c_i uma $(i + 1)$-coloração própria de G_i. Vamos definir uma coloração própria $c_{i+1} : V(G_{i+1}) \to \{1, \ldots, i + 2\})$ para G_{i+1}. Defina:

$$c_{i+1}(x) = \begin{cases} c_i(v_i) & , \text{ se } x = v_i \text{ ou } x = v'_i; \\ i + 2 & , \text{ se } x = w_{i+1}. \end{cases}$$

Note que a cor $i+2$ é usada apenas em w_{i+1} e portanto o mesmo não possui vizinhos com a mesma cor. Além disso, como $N_{G_{i+1}}(v_i) = N_{G_{i+1}}(v'_i) \setminus \{w_{i+i}\}$, então c_{i+1} é própria e, portanto, $\chi(G_{i+1}) \leq i + 2$.

Vamos provar que $\chi(G_{i+1}) \geq i + 2$. Por absurdo, seja c uma $(i + 1)$-coloração própria de G_{i+1}. Sem perda de generalidade, suponha que $c(w_{i+1}) = i + 1$. Note que como $N_{G_{i+1}}(w_{i+1}) = V'$, então todo vértice de V' recebe uma cor no conjunto $\{1, \ldots, k\}$. Note também que como cada vértice $v'_i \in V'$ possui um não-vizinho $v_i \in V(G_i)$ tal que $v'_i v_i \notin E(G_{i+1})$ e $N_{G_{i+1}}(v_i) = N_{G_{i+1}}(v'_i) \setminus \{w_{i+i}\}$, então podemos obter uma k-coloração própria para G_i ao atribuirmos a v_i a mesma cor que v'_i em c. Isso contradiz a hipótese que $\chi(G) = i + 1$. □

Essa construção nos mostra que o número cromático de um grafo pode ser arbitrariamente alto, mesmo em um grafo sem triângulos. Porém observe que a construção possui ciclos com quatro vértices em G_i, para $i \geq 3$. Erdős fortaleceu este resultado, ao mostrar que:

Teorema 4.4 (Erdős)**.** *Para todos inteiros positivos g e k, existe um grafo G tal que $\chi(G) \geq k$ e a cintura de G é pelo menos g.*

Lembre que a cintura de um grafo é o comprimento de um menor ciclo de G (vide Definição 1.30 na Página 12).

Por outro lado, houve diversos estudos motivados por esse limitante superior devido a uma conjectura proposta por Claude Berge. Para apresentá-la, precisamos da seguinte definição:

Definição 4.6. Um grafo G é *perfeito* se, para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$, temos $\chi(H) = \omega(H)$.

Berge acreditava que:

Conjectura 4.1 (Berge)**.** *G é perfeito se, e somente se, G não contém buracos ímpares (ou seja, ciclos sem cordas ímpares C_{2k+1}, para $k \geq 2$) ou seus complementos como subgrafo induzido.*

Definição 4.7. Dizemos que $e = uv$ é *corda* do ciclo C se $u, v \in V(C)$ e, u e v não são consecutivos em C.

É fácil observar que os grafos completos e os grafos bipartidos são perfeitos, já que subgrafos induzidos de grafos completos são completos, e de bipartidos são também grafos bipartidos.

Uma outra classe de grafos que é formada por grafos perfeitos, é a de grafos de intervalos:

Definição 4.8. Um grafo $G = (V, E)$ é *de intervalos* se existe uma família $\mathcal{F}$ de $n(G)$ intervalos fechados em $\mathbb{R}$ e uma bijeção $f : V(G) \to \mathcal{F}$ tal que $uv \in E(G)$ se, e somente se, $f(u) \cap f(v) \neq \emptyset$.

Proposição 4.4. *Se G é de intervalos, então G é perfeito.*

Demonstração. Como todo subgrafo induzido H de G é também um grafo de intervalos, basta mostrar que $\chi(G) = \omega(G)$, se G é de intervalos.

Seja $v_1, \ldots, v_n$ a ordem dos vértices de G dada pelo início dos intervalos correspondentes.

Ao aplicarmos o Algoritmo Guloso sobre G usando a ordem $v_1, \ldots, v_n$, observe que a cor de cada vértice v_i não excede o tamanho da clique formada por v_i e seus vizinhos já coloridos, ou seja, vértices em $v_1, \ldots, v_{i-1}$, cujos intervalos iniciam antes do início do intervalo de v_i e terminam após o mesmo.

Logo, toda cor usada não excede o tamanho de uma clique de G. Como $\chi(G) \geq \omega(G)$, deduzimos que $\chi(G) = \omega(G)$. □

A conjectura de Berge foi amplamente estudada por diversos pesquisadores ao longo de várias décadas. Um resultado extremamente relevante que ficou conhecido como o Teorema Fraco dos Grafos Perfeitos foi demonstrado por Lovász:

Teorema 4.5 (Lovász, 1972)**.** *G é perfeito se, e somente se, $\overline{G}$ é perfeito.*

Finalmente, em 2002, os pesquisadores Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas anunciaram ter demonstrado a conjectura de Berge, no mesmo ano em que Claude Berge faleceu. O resultado, hoje conhecido como o Teorema Forte dos Grafos Perfeitos, foi finalmente publicado quatro anos depois:

Teorema 4.6 (Chudnovsky-Robertson-Seymour-Thomas, 2006)**.** *A conjectura de Berge é válida.*

4.2 Grafos k-cromáticos

Note que se G é k-cromático, então a remoção de uma aresta de G ou vértice de G não pode aumentar seu número cromático, pela Proposição 4.2. Desse modo, note que todo grafo G de número cromático $\chi(G) = k$ possui um subgrafo minimal com relação à propriedade de ser k-cromático.

Definição 4.9. Um grafo G é *k-crítico* se $\chi(G) = k$ e, para todo subgrafo próprio $H \subsetneq G$, temos que $\chi(H) < k$.

Proposição 4.5. *Se $\chi(G) = k$, então existe $H \subseteq G$ tal que H é k-crítico.*

Demonstração. Se G é k-crítico, tome $H = G$. Senão, remova vértices e/ou arestas de G enquanto seu número cromático não diminuir. Ao final do processo, obtém-se $H \subseteq G$ como requerido. □

Lema 4.3. *Se G é um grafo k-crítico, então $\delta(G) \geq k - 1$.*

Demonstração. Por absurdo, seja $v \in V(G)$ tal que $d_G(v) < k - 1$. Como G é k-crítico, então $G' = G - v$ possui coloração própria c' com no máximo $(k - 1)$ cores, já que G' é subgrafo próprio de G e G é k-crítico. Como $d_G(v) \leq k - 2$, então existe cor p no conjunto $\{1, \ldots, k - 1\}$ tal que p não foi atribuído a um dos vizinhos de v. Logo, podemos obter uma $(k - 1)$-coloração própria para G ao colorirmos v com a cor p, mantendo as cores dos demais vértices como na coloração c'. Isso contradiz o fato de $\chi(G) = k$. □

Teorema 4.7 (Szekeres-Wilf, 1968)**.** *Se G é um grafo, então $\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$.*

Demonstração. Sejam $k = \chi(G)$ e H' um subgrafo k-crítico de G. Pelo Lema 4.3, temos que:

$$\chi(G) - 1 = \chi(H') - 1 \leq \delta(H') \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H).$$

□

Proposição 4.6. *Se G é k-crítico, $k \geq 2$, então:*

(a) G é conexo;

(b) Se $n(G) \geq 3$, então G é 2-conexo;

(c) $\delta(G) \geq k - 1$;

(d) Para todo $v \in V(G)$, existe uma coloração $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ própria tal que $\{1, \ldots, k\} = \{c(z) \mid z \in N_G(v) \cup \{v\}\}$;

(e) Para todo $uv \in E(G)$ e para toda coloração $c : V(G) \to \{1, \ldots, k - 1\}$ própria de $G - uv$, temos que $c(u) = c(v)$.

Demonstração. (a) Por absurdo, sejam $G_1, \ldots, G_r$ as componentes de G, com $r > 1$. Como cada componente possui ao menos um vértice, cada G_i é um subgrafo próprio de G. Logo, $\chi(G_i) < k$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Como não há arestas entre dois vértices de componentes distintas, a união de colorações ótimas de cada componente é uma coloração própria para G com no máximo $k - 1$ cores, contradizendo a hipótese que $\chi(G) = k$.

(b) Seja G um grafo k-crítico, com $n(G) \geq 3$ e $k \geq 2$. Por absurdo, suponha que G não é 2-conexo. Como G é conexo, pelo item anterior, temos que $\kappa(G) \geq 1$. Como $n(G) \geq 3$, então G possui uma articulação v. Sejam $G_1, \ldots, G_r$ as componentes de $G - v$, com $r > 1$. Defina sejam $G'_1, \ldots, G'_r$ os subgrafos próprios de G tais que $G'_i = G[V(G_i) \cup \{v\}]$, para todo $r > 1$. Então, cada G'_i pode ser colorido com no máximo $k - 1$ cores, já que G é k-crítico. Sejam $c'_1, \ldots, c'_r$ colorações de $G'_1, \ldots, G'_r$ com no máximo $k - 1$ cores, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Note que em cada c'_i, podemos trocar os rótulos de duas cores de modo a garantir que $c'_i(v) = 1$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Portanto, a coloração $c = c'_1 \cup \ldots \cup c'_r$ é uma $(k - 1)$-coloração própria de G, contradizendo novamente a hipótese que $\chi(G) = k$.

(c) Provado no Lema 4.3.

(d) Seja c uma $(k-1)$-coloração própria de $G-v$. Note que todas as cores no conjunto $\{1,\ldots,k-1\}$ devem ocorrer em pelo menos um vizinho de v, caso contrário, poderíamos colorir G com $k-1$ cores. Logo, ao adicionarmos a cor k em v, completamos uma k-coloração própria de G que satisfaz o enunciado.

(e) Se existir $(k-1)$-coloração própria de $G-uv$ tal que u recebe cor distinta de v, então ao adicionarmos a aresta uv, teremos uma $(k-1)$-coloração própria de G. Absurdo! □

É importante ressaltar que tais propriedades de grafos críticos são extremamente úteis em demonstrações de limitantes superiores para o número cromático, ao tomarmos por absurdo um contra-exemplo minimal (com respeito à relação de subgrafo). Em outras palavras, seja C uma classe de grafos fechada para a relação de subgrafo, ou seja, tal que todo subgrafo de um grafo em C também pertence a C. Se desejamos demonstrar que todos os grafos G de uma tal classe C satisfazem a propriedade de que $\chi(G) \leq k$, podemos supor por absurdo que existe um grafo G em C tal que $\chi(G) \geq k+1$ e que G é minimal, ou seja, todo subgrafo próprio $H \subsetneq G$, satisfaz $\chi(H) \leq k$. Note que tal contra-exemplo G é $(k+1)$-crítico. Logo, todas as propriedades demonstradas na Proposição 4.6 podem ser usadas na busca de uma contradição.

De um modo geral, não se conhece em detalhes a estrutura de um grafo G tal que $\chi(G) \geq k$. Vimos que uma clique de cardinalidade k força o número cromático a ser pelo menos k, porém o mesmo pode ser arbitrariamente elevado sem sequer termos ciclos induzidos de qualquer tamanho que escolhermos. Os resultados sobre grafos críticos, no dizem que há um subgrafo crítico de G, sobre o qual podemos obter algumas informações sobre sua estrutura. Um outro resultado do mesmo estilo, é o Teorema de Hajós. Para apresentá-lo, precisamos da seguinte definição:

Definição 4.10. A classe de grafos *k-construtíveis* é definida recursivamente como segue:

- K_k é k-construtível;
- (Soma de Hajós) Se G_1 e G_2 são grafos k-construtíveis, $u_1v_1 \in E(G_1)$ e $u_2v_2 \in E(G_2)$, então o grafo G obtido de G_1 e G_2 tal que:

  $$V(G) = ((V(G_1) \cup V(G_2)) \setminus \{u_1, u_2\}) \cup \{u\}$$

  e

  $$E(G) = ((E(G_1) \cup E(G_2)) \setminus \{u_1v_1, u_2v_2\}) \cup \{ux \mid x \in N_{G_1}(u_1) \cup N_{G_2}(u_2)\} \cup \{v_1v_2\}$$

  é k-construtível.
- (Identificação) Se G' é k-construtível e $uv \notin E(G')$, então o grafo G obtido de G' tal que $V(G) = (V(G') \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ e

  $$E(G) = E(G') \setminus \{ux, vy \mid x \in N_G(u) \text{ e } y \in N_{G'}(v)\} \cup \{wx \mid x \in N_{G'}(u) \cup N_{G'}(v)\}$$

  é k-construtível.

Teorema 4.8 (Hajós, 1961)**.** *$\chi(G) \geq k$ se, e somente se, existe $H \subseteq G$ tal que H é k-construtível.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponha que G possui um subgrafo k-construtível H. Vamos mostrar que $\chi(H) \geq k$ e, pela Proposição 4.2, deduziremos que $\chi(G) \geq k$. A demonstração segue por indução no número de operações p de Soma de Hajós e Identificações aplicadas sobre grafos K_k para obtermos H.

Base: $p = 0$, então $H \cong K_k$ e, portanto, $\chi(H) = k$.

Hipótese Indutiva: Suponha que, para todo $0 \leq p' < p$, se H' é um grafo k-construtível obtido com p' operações, então $\chi(H') \geq k$.

Passo Indutivo: Seja H um grafo k-construtível obtido de p operações. Suponha primeiro que a operação p foi a Soma de Hajós sobre as arestas u_1v_1 e u_2v_2 de grafos H_1 e H_2, respectivamente. Pela Hipótese Indutiva, temos $\chi(H_1) \geq k$ e $\chi(H_2) \geq k$. Por absurdo, suponha que $\chi(H) < k$. Seja c uma $\chi(H)$-coloração própria c de H. Como $v_1v_2 \in E(H)$, temos que $c(v_1) \neq c(v_2)$. Logo, $c(v_1) \neq c(u)$ ou $c(v_2) \neq c(u)$. Sem perda de generalidade, suponha que $c(v_1) \neq c(u)$. Portanto, note que a coloração c restrita aos vértices de H_1 é uma $\chi(H)$-coloração própria de H_1, contradizendo a hipótese que $\chi(H_1) \geq k$.

Suponha então que a p-ésima operação foi a de Identificação de dois vértices não-adjacentes u e v em um grafo k-construtível H'. Suponha, por absurdo, que $\chi(H) < k$ e seja c uma $\chi(H)$-coloração própria de H. Note que podemos obter uma $\chi(H)$-coloração própria c' para H' ao atribuirmos a u e a v a mesma cor do vértice $w \in V(H)$ em c e mantendo as cores dos demais vértices como em c. Isso contradiz a hipótese que $\chi(H') \geq k$.

($\Rightarrow$) Por absurdo, seja G um grafo tal que $\chi(G) \geq k$ e G não contém nenhum subgrafo k-construtível. Como $\chi(G) \geq k$, note que $n(G) \geq k$. Como K_k é k-construtível, observe que G não é completo. Além disso, como a adição de uma aresta não diminui o número cromático de um grafo, podemos supor, sem perda de generalidade, que G é maximal em arestas. Em outras palavras, $\chi(G) \geq k$, G não contém nenhum subgrafo H que seja k-construtível, porém $G + e$, para qualquer aresta $e \notin E(G)$, contém um subgrafo k-construtível.

Vamos primeiro provar que G não é um grafo multipartido completo, ou seja, $V(G)$ não pode ser particionado em $S_1, \ldots, S_p$ conjuntos independentes de modo que $v_iv_j \neq E(G)$ se, e somente se, $v_i, v_j \in S_r$, para algum $r \in \{1, \ldots, p\}$.

Por absurdo, seja $\{S_1, \ldots, S_p\}$ uma partição com descrita anteriormente. Note que tal grafo pode ser colorido com p cores, ao atribuirmos a cor i para todos os vértices em S_i, para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$. Logo, como $\chi(G) \geq k$, deduzimos que $p \geq k$. Entretanto, ao tomarmos um vértice em cada um dos conjuntos $S_1, \ldots, S_k$, o subgrafo induzido por tais vértices é um K_k, contradizendo a hipótese que G não contém sugrafos k-construtíveis.

Portanto, G não é um grafo multipartido completo. Isso implica que a relação de não-adjacência nos vértices de G não é uma relação de equivalência. Formalmente, seja $R \subseteq V(G) \times V(G)$ tal que $R = \{(u, v) \mid uv \notin E(G)\}$. Como G é simples, o mesmo não possui laços e, portanto, R é reflexiva. R, por definição, é simétrica. Caso R fosse transitiva, o conjunto de classes de equivalência de R seriam uma partição de $V(G)$ em $S_1, \ldots, S_p$ conjuntos independentes de modo que $v_iv_j \neq E(G)$ se, e somente se, $v_i, v_j \in S_r$, para algum $r \in \{1, \ldots, p\}$. Tal partição, como provado anteriormente, não existe. Logo, a transitividade não é satisfeita. Portanto, existem em G três vértices v_1, u, e v_2 tais que $v_1u \notin E(G)$, $uv_2 \notin E(G)$ e $v_1v_2 \in E(G)$.

Seja G_1 o grafo obtido de G pela adição da aresta uv_1. Pela maximalidade de G, note que G_1 contém um subgrafo k-construtível H_1 e, como G não possuía subgrafos k-construtíveis, H_1 necessariamente contém a aresta uv_1. De modo análogo, seja G_2 obtido de G pela adição de uv_2 e seja H_2 o subgrafo k-construtível de G_2 que contém

uv_2. Observe que, além de u, tais subgrafos podem conter outros vértices de G em comum. Seja H o grafo obtido das seguintes operações:

1. Soma de Hajós de H_1 e H_2 nas arestas uv_1 e uv_2; e
2. Identificação de cada vértice de H_1 com o seu correspondente em H_2, caso o vértice ocorra nos dois subgrafos.

Observe que como H_1 e H_2 são k-construtíveis, então H também é k-construtível. Além disso, note que H é um subgrafo de G, contradizendo a hipótese que G não continha tais subgrafos. □

4.3 Coloração de Arestas

Uma *k-coloração de arestas* de G é uma função $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$. Uma k-coloração de arestas é *própria* se para quaisquer duas arestas incidentes e_1 e e_2, temos $c(e_1) \neq c(e_2)$. O *índice cromático* de um grafo G é

$$\chi'(G) = \min\{k \mid G \text{ possui } k\text{-coloração própria de arestas}\}.$$

Se c é uma k-coloração própria de arestas de G, dizemos que o conjunto de arestas de cor i é uma *classe de cor*, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Se $k = \chi'(G)$, dizemos que c é uma coloração *ótima*.

Como arestas de mesma cor não são incidentes, note que cada classe de cor em uma coloração própria de arestas corresponde a um emparelhamento de G. Logo, G tem k-coloração própria de $E(G)$ se, e somente se, há uma partição de $E(G)$ em no máximo k emparelhamentos.

Definição 4.11. O *grafo linha* $L(G)$ de um grafo G é tal que:
$V(L(G)) = E(G)$ e $e_1e_2 \in E(L(G))$ se, e somente se, e_1 e e_2 são incidentes em G.

Observação 4.1. $\chi'(G) = k$ se, e somente se, $\chi(L(G)) = k$.

Teorema 4.9 (Vizing-Gupta, 1964-1966)**.** *Se G é um grafo simples, então:*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Demonstração. As arestas incidentes a um vértice de grau máximo precisam receber cores distintas, logo $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Para mostrarmos que $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, apresentaremos um algoritmo que, dada uma coloração em arestas parcial c de G, ou seja, uma coloração em arestas (própria) de um subgrafo próprio (pré-colorido) $H \subsetneq G$, atribui uma cor $x \leq \Delta(G) + 1$ a uma aresta $uv \in E(G) \setminus E(H)$ que não estava colorida, de modo que tal cor x é distinta das cores já atribuídas às arestas já coloridas em H incidentes a u e a v. Note que, partindo do subgrafo gerador vazio de G e aplicando tal algoritmo $m(G)$ vezes, obteremos uma $(\Delta(G) + 1)$-coloração em arestas própria de G. Portanto, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Se c_H é uma $(\Delta(G) + 1)$-coloração em arestas de $H \subsetneq G$, diremos que uma cor $x \in \{1, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ é *disponível* para uma aresta $uv \in E(G) \setminus E(H)$ se não há aresta de H incidente a u ou a v colorida com a cor x. Em particular, diremos que x é uma cor *que falta* em u (e *que falta* em v).

Procedemos então ao algoritmo. Seja c_H uma $(\Delta(G) + 1)$-coloração em arestas de $H \subsetneq G$ e seja $uv \in E(G) \setminus E(G)$ uma aresta ainda não colorida. A cada passo, buscaremos atribuir uma cor a uv, mantendo coloração parcial própria em arestas.

Note que como buscamos uma $(\Delta(G)+1)$-coloração em arestas de G e cada vértice tem no máximo $\Delta(G)$ arestas incidentes, há ao menos uma cor que falta em cada vértice. No caso de u, como a aresta uv ainda não está colorida, há então ao menos duas cores que faltam em u. Denotaremos duas delas por a_0 e $a_{\Delta+1}$.

Se a_0 (ou $a_{\Delta+1}$) falta em v, basta colorir uv com cor a_0 (resp. com $a_{\Delta+1}$). Senão, seja $a_1 \neq a_0$ uma cor que falta em $v = v_0$. Se a_1 falta em u, podemos colorir uv com a_1. Senão, u possui vizinho v_1 tal que $c_H(uv_1) = a_1$.

Novamente, se a cor a_0 (ou $a_{\Delta+1}$) falta em v_1, podemos colorir uv_1 com a_0 (resp. com $a_{\Delta+1}$) e então uv com a cor a_1. Senão, seja a_2 uma cor que falta em v_1. Se a_2 também faltar em u, podemos colorir uv_1 com a cor a_2 e depois colorir uv com a cor a_1. Desse modo, u deve possuir um vizinho, que denotaremos por v_2 tal que $c_H(uv_2) = a_2$.

De modo análogo, para um inteiro $2 \leq i \leq d(u) - 1 \leq \Delta(G) - 1$, podemos deduzir que se a cor a_0 (ou $a_{\Delta+1}$) faltar em a_i, podemos proceder com uma troca de cores de modo a colorir uv_i com a_0 (resp. com $a_{\Delta+1}$ e colorir uv_j com a_{j+1}, para todo inteiro $0 \leq j < i$. Senão, denotamos por a_{i+1} como uma cor que falta em a_i e deduzimos que se a_{i+1} também falta a u, podemos recolorir uv_i com a cor a_{i+1} e recolorir uv_j com a_{j+1}, para todo inteiro $0 \leq j < i$. Senão, u deve possuir um vizinho a_{i+1} tal que $c_H(ua_{i+1}) = i + 1$.

Note que como u tem no máximo $\Delta(G)$ vizinhos e a aresta $uv = uv_0$ não está colorida, então não é possível que os vértices, $v_1, \ldots, v_{\Delta(G)}$ (definidos em função da cor que falta em v_{i-1}) sejam todos distintos. De fato, mesmo no pior caso quando u teria $\Delta(G)$ vizinhos, note que: como c_H é uma $(\Delta(G)+1)$-coloração de H, como $c_H(uv_i) = a_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, \Delta(G)\}$, e como a_0 e $a_{\Delta(G)}$ não devem ser cores que faltam a nenhum a_i, inclusive $a_{\Delta(G)+1}$, a cor que falta a $v_{\Delta(G)+1}$ deverá necessariamente pertencer ao conjunto $\{a_1, \ldots, a_{\Delta(G)-1}\}$.

Seja ℓ o menor índice tal que a cor que falta a um vértice v_ℓ pertence ao conjunto $\{a_, \ldots, a_{\ell-1}\}$. Desse modo, seja a_k uma cor que falta ao vértice v_ℓ, com $1 \leq k < \ell \leq \Delta(G)$, tal que a_k também falta a v_{k-1} e, portanto, é a cor da aresta uv_k. Já sabemos que as cores a_0 (e $a_{\Delta+1}$) não faltam a v_ℓ, caso contrário poderíamos encontrar uma cor para uv a partir de uma troca de cores sucessivas a partir de uv_ℓ.

Seja P um caminho maximal bicolorido (em particular, as arestas ainda não coloridas são ignoradas) com as cores a_0 e a_k que contém v_ℓ. Como a_k é a cor que falta a v_ℓ, note que P tem v_ℓ como uma de suas extremidades. Vamos analisar o comportamento de P com respeito à vizinhança de u pré-colorida:

Caso 1: P contém v_k. Neste caso, note que P também deve conter a aresta uv_k e, como a cor a_0 falta em u, temos que a outra extremidade de P será u. Neste caso, trocamos as cores das arestas em P, de modo que agora a cor a_0 é a cor na aresta uv_k, colorimos uv_{k-1} com a cor a_k e recolorimos uv_j com a_{j+1}, para todo inteiro $0 \leq j < k - 1$.

Caso 2: P contém v_{k-1}. Neste caso, como a_k é uma cor que falta a v_{k-1}, note que v_{k-1} será a outra extremidade de P. Novamente, trocaremos as cores das arestas em P, recoloriremos uv_j com a_{j+1}, para todo inteiro $0 \leq j < k - 1$ e coloriremos uv_{k-1} com a cor a_0.

Caso 3: P não contém nem v_{k-1} nem v_k. Neste caso, trocaremos as cores das arestas em P, recoloriremos uv_j com a_{j+1}, para todo inteiro $0 \leq j < \ell - 1$ e coloriremos uv_ℓ com a cor a_0. □

Definição 4.12. *G* é de *Classe 1* se $\chi'(G) = \Delta(G)$, senão *G* é de *Classe 2*.

Teorema 4.10 (König, 1916)**.** *Se G é bipartido, então G é de Classe 1.*

Demonstração. Observe que podemos construir um grafo H tal que $G \subseteq H$ e H é bipartido $\Delta(G)-$regular. Para tanto, basta adicionar vértices de modo que as partes da bipartição tenham a mesma cardinalidade e, em seguida, adicionar iterativamente uma aresta entre dois vértices de grau $< \chi(G)$. Note que tais vértices existem enquanto o grafo não for regular. Pelo Teorema 2.3, H possui um emparelhamento perfeito M. Colorimos todas as arestas de H com a cor 1. Observe que $G - M$ é novamente um grafo bipartido $(\Delta(G) - 1)-$regular e possui um emparelhamento M'. Colorimos as arestas de M' com a cor 2, e repetimos o processo. Logo, temos:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'(H) \leq \Delta(G).$$

□

4.4 Exercícios

Questão 4.1. Prove ou mostre um contra-exemplo:

(a) [West, 5.1.2] Se $G_1, \ldots, G_k$ são as componentes de um grafo G, então $\chi(G) = \max_i \chi(G_i)$.

(b) [West, 5.1.3] Se $G_1, \ldots, G_k$ são os blocos de um grafo G, então $\chi(G) = \max_i \chi(G_i)$.

(c) [West, 5.1.12] Se $\chi(G) = k$, então G possui k-coloração onde pelo menos uma classe de cor tem cardinalidade $\alpha(G)$.

(d) [West, 5.1.20] Seja G um grafo onde todo par de ciclos ímpares possui pelo menos um vértice em comum. Então, $\chi(G) \leq 5$.

(e) [West, 5.1.26] Sejam $S_1, \ldots, S_m$ conjuntos finitos e seja $U = S_1 \times \ldots \times S_m$. Seja G o grafo tal que $V(G) = U$ e $uv \in E(G)$ se e somente se u difere de v em todas as coordenadas. Então $\chi(G) = \min_{i=1}^{m} |S_i|$.

Questão 4.2. Resolva as questões a seguir:

(a) [West, 5.1.29] Para o grafo G abaixo, determine seu número cromático $\chi(G)$ e um subgrafo de G que seja $(\chi(G))$-crítico.

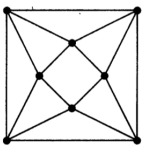


Figura 4.1: Grafo G do Exercício 2(a).

(b) [West, 5.1.33] Todo grafo G possui uma ordenação de seus vértices cuja coloração gulosa (gerada pelo Algoritmo Guloso nessa ordem) usa $\chi(G)$ cores.

(c) [West, 5.1.41] Prove por indução em $n(G)$ que $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.

(d) [West, 5.2.3(a)] Prove que se G é k-crítico, então não existem $x, y \in V(G)$ tais que $N(x) \subseteq N(y)$. Deduza que não existem grafos k-críticos com $k + 1$ vértices, usando o fato de que, caso contrário, G não é completo e $\delta(G) = k - 1$.

(e) [West, 5.2.7] Prove que se G é k-cromático, então em toda classe de cor de uma k-coloração de G existe um vértice com pelo menos um vizinho em cada uma das $k-1$ outras cores.

(f) [West, 5.2.32] Sejam G e H dois grafos k-críticos com um vértice u em comum. Prove que o grafo $(G-uv) \cup (H-uw) \cup vw$ é k-crítico.

Questão 4.3. Resolva as questões a seguir sobre Coloração de Arestas:

(a) [West, 7.1.3] Determine o índice cromático de $C_n \square K_2$.

(b) [West, 7.1.4] Obtenha uma desigualdade para $\chi'(G)$ em função de $m(G)$ e $\alpha'(G)$.

(c) [West, 7.1.7] Determine se existe um grafo H tal que $L(H) = \overline{P_5}$. Em caso afirmativo, exiba um grafo H satisfazendo essa propriedade.

(d) [West, 7.1.8] Prove que $L(K_{m,n})$ é isomorfo a $K_m \square K_n$.

(e) [West, 7.1.9] Seja G um grafo simples. Prove que:

- os vértices em $L(G)$ formam uma clique se, e somente se, as arestas correspondentes em G tem uma extremidade em comum ou formam um triângulo.
- $\omega(L(G)) = \Delta(G)$, a menos que $\Delta(G) = 2$ e alguma componente de G seja um triângulo.

(f) [West, 7.1.19] Prove que, para todo grafo bipartido simples G, existe um grafo simples H, bipartido e $\Delta(G)$-regular que contém G.

(g) [West, 7.1.21] Seja G um grafo bipartido com grau máximo k e $c : E(H) \to \{1, \ldots, k\}$ uma k-coloração própria das arestas de um subgrafo $H \subseteq G$. Seja $uv \in E(G) \setminus E(H)$. Use caminhos alternantes bicoloridos para colorir $H + uv$, a partir de c. Deduza que $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Capítulo 5

Grafos Planares

Antes de definirmos grafos planares, precisamos definir algumas noções sobre representações no plano.

Uma *curva* é uma função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Uma u,v-curva é tal que $f(0) = u$ e $f(1) = v$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$. Uma curva é *poligonal* se é composta por uma sequência finita de segmentos de reta. Uma curva f é *simples* se f é injetiva no intervalo $(0,1)$, ou seja, a própria curva não se intersecta a menos, possivelmente, no caso em que $u = v$. Uma u,v-curva é *fechada* se $u = v$.

Uma *representação ou imersão* de um grafo G no plano é uma função que associa a cada vértice um ponto em $\mathbb{R}^2$ e a cada aresta $e = uv$ uma u,v-curva poligonal simples. Se duas arestas se intersectam na representação de um grafo G, tal interseção é um *cruzamento*.

Definição 5.1. Um grafo *planar* é um grafo que admite uma representação no plano $\mathbb{R}^2$ sem cruzamento de arestas.

Note que podemos assumir que nenhuma aresta contém um ponto da representação correspondente à um vértice que não é uma de suas extremidades, que duas arestas se cruzam no máximo uma vez e que nenhum ponto constitui a interseção de três arestas distintas.

Definição 5.2. Um grafo *plano* é tal que seu conjunto de vértices é um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$ e seu conjunto de arestas é formado por curvas poligonais simples, ou seja, é uma determinada imersão sem cruzamentos de um grafo planar.

Um *conjunto aberto* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é tal que, para todo ponto $p \in U$, o conjunto de pontos em um círculo centrado em p e de raio ϵ, para algum $\epsilon \in \mathbb{R}$, também está contido em U. Uma *região* R é um conjunto aberto tal que, para quaisquer dois pontos u e v em R existe uma u,v-curva poligonal que está contida em R.

Definição 5.3. Se G é um grafo plano, então uma *face* f de G é uma região maximal de $\mathbb{R}^2$ sem pontos da representação de G. A *fronteira* (ou borda) de uma face f é o conjunto de arestas que a delimita, denotado por $\delta(f)$.

Teorema 5.1 (Curva de Jordan Restrito)**.** *Qualquer curva poligonal simples fechada divide o plano em duas regiões, sendo uma limitada e a outra ilimitada, isto é, o seu interior e o seu exterior.*

Proposição 5.1. *K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.*

Demonstração. Considere uma imersão de K_5 ou $K_{3,3}$ no plano. Seja C um ciclo gerador. Se a imersão não tem cruzamentos, então C é representado como uma curva poligonal simples fechada. As cordas de C devem ser representadas dentro ou fora da curva. Duas cordas cruzam se as suas extremidades em C ocorrem de forma alternada. Quando temos um cruzamento entre duas cordas, devemos representar uma dentro de C e outra fora de C.

Um 6-ciclo em $K_{3,3}$ tem três cordas com cruzamento (dois a dois). Ao colocar uma corda dentro do ciclo e outra fora do ciclo, não temos como completar a representação do $K_{3,3}$. Um 5-ciclo em K_5, no máximo duas cordas podem ser representadas dentro ou fora do ciclo. Como temos 5 cordas, não conseguimos completar a representação de K_5. Portanto, $K_{3,3}$ e K_5 não são planares. □

Definição 5.4. Seja G um grafo plano. O *dual* de G, denotado por G^*, é o grafo planar que possui um vértice para cada face de G e uma aresta $e^* \in E(G^*)$ para cada aresta $e \in E(G)$ tal que se as faces nos dois lados de e são f_i e f_j, então $e^* = f_i f_j$.

Definição 5.5. O *dual fraco* de G é obtido do dual G^* pela remoção do vértice correspondente à face externa.

Definição 5.6. Se G é plano e $f \in F(G)$ (conjunto das faces de G), então o *comprimento (ou grau)* de f, denotado por $l(f)$ (ou $d_G(f)$), é o comprimento de um menor passeio fechado em $\delta(f)$ (que é igual a $d_{G^*}(f)$).

Observação 5.1. Sobre projeção estereográfica, temos que:

G pode ser representado em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, G pode ser representado na esfera sem cruzamentos.

Pode ser feita a escolha de qual face será a externa.

Proposição 5.2. *Seja G um grafo plano. Então:*

$$2m(G) = \sum_{f \in F(G)} d_G(f) = \sum_{v \in V(G^*)} d_{G^*}(v)$$

Demonstração. Note que se há duas faces distintas que contém $e \in E(G)$ em suas bordas, então e contribui em uma unidade no grau de cada face. Caso contrário, essa aresta e é uma ponte e também contribuirá com 2 unidades no grau da única face que a possui em sua borda. □

Observação 5.2. Se G é plano e e não é ponte, então:

$G \setminus e$ possui uma aresta e uma face a menos de G. G/e possui uma aresta e uma vértice a menos de G.

Se G é plano e e é ponte, então:

$G \setminus e$ possui uma aresta a menos de G. G/e possui uma aresta e uma vértice a menos de G.

Teorema 5.2 (Euler, 1758)**.** *Seja G um grafo plano conexo, então:*

$$n(G) - m(G) + f(G) = 2,$$

onde $f(G) = |F(G)|$.

Demonstração. Por indução em $n(G)$, *Base:* $n(G) = 1$. Note que cada aresta de G é um laço e, para cada laço, temos uma face. Como temos um vértice e a face externa, deduzimos que $n(G) = 1$, $f(G) = m(G) + 1$. *Hipótese Indutiva:* Suponha que $n(G') -$

$m(G') + f(G') = 2$, para todo grafo G' com k vértices, onde $k < n$. *Passo Indutivo:* Seja G com $n(G) = n \geq 2$. Como G é conexo, seja $e \in E(G)$ que não é um laço. Note que:

$$n(G/e) - m(G/e) + f(G/e) = 2.$$

Pela Observação 5.2 e a igualdade acima, temos que:

$$(n(G) - 1) - (m(G) - 1) + f(G) = 2.$$

□

Proposição 5.3. *Seja G um grafo planar simples conexo. Então:*

$$m(G) \leq 3n(G) - 6.$$

Demonstração. Seja G_p uma imersão planar de G. Logo, $n(G_p) = n(G)$ e $m(G_p) = m(G)$. E portanto, pelo Teorema 5.2 (Euler), temos que:

$$n(G_p) - m(G_p) + f(G_p) = 2$$

Pela Proposição 5.2:

$$2m(G_p) = \sum_{f \in F(G)} d_{G_p}(f)$$

Como G_p é simples, $d_{G_p}(f) \geq 3$. Portanto:

$$2m(G_p) = \sum_{f \in F(G)} d_{G_p}(f) \geq 3f(G_p)$$

Logo,

$$3f(G_p) = 6 - 3n(G_p) + 3m(G_p)$$
$$2m(G_p) \geq 6 - 3n(G_p) + 3m(G_p)$$
$$m(G) \leq 3n(G_p) - 6$$

□

Proposição 5.4. *Se G é planar, simples e sem triângulos, então* $m(G) \leq 2n(G) - 4$.

Demonstração. Seja G_p uma imersão de G no plano sem cruzamentos.

$$2m(G_p) = \sum_{f \in F(G)} d_{G_p}(f) \geq 4f(G_p)$$

Pelo Teorema de Euler, temos que:

$$n(G_p) - m(G_p) + f(G_p) = 2$$

Multiplicando a igualdade acima por 4, temos:

$$4n(G_p) - 4m(G_p) + 4f(G_p) = 8$$
$$2m(G_p) \geq 4f(G_p) = 8 - 4n(G_p) + 4m(G_p)$$
$$2m(G_p) \leq 4n(G_p) - 8$$
$$m(G_p) \leq 2n(G_p) - 4$$

□

Para o seguinte teorema, lembre que uma ligação é um corte de arestas minimal não-vazio, como definido na Página 37.

Teorema 5.3. *Seja G um grafo plano. Um conjunto de arestas de G formam um ciclo se, e somente se, o conjunto de arestas correspondentes no dual G^* formam uma ligação.*

Demonstração. Seja $D \subseteq E(G)$. Vamos mostrar que o único caso que D é tal que as arestas correspondentes no dual D^* formam uma ligação é no caso de D corresponder a um ciclo.

Suponha primeiro que D é um conjunto de arestas de um ciclo de G. O conjunto de arestas $D^* \subseteq E(G^*)$ correspondentes no dual G^* contém todas as arestas que ligam as faces de dentro de D para as faces externas de D (o Teorema da Curva de Jordan implica que existe pelo menos uma face externa a D e uma face interna a D). Portanto, D^* contém um corte de arestas. Note que D^* é minimal e não vazio. Portanto, D^* é uma ligação.

Se D contiver propriamente as arestas de um ciclo de G, as arestas correspondentes em D^* contém propriamente um corte de arestas. Logo, a minimalidade não será satisfeita e, consequentemente, D^* não pode corresponder à uma ligação.

Se D não contém nenhum ciclo em G, então D não "engloba" nenhuma região de G. Então, a partir de qualquer face de G, é possível alcançar a face não-limitada de G faces sem cruzar D. Então, $G^* - D^*$ é conexo e D^* não contém nenhum corte de arestas. Portanto, D^* é o corte de arestas minimal se, e somente se, D é um ciclo. □

Proposição 5.5. *Seja G um grafo plano. São equivalentes:*

(I) G é bipartido;

(II) Toda face de G tem grau par;

(III) G^* é Euleriano.

Demonstração. (I) → (II) G é bipartido. Suponha, por absurdo, que existe $f \in F(G)$ tal que $d_G(f)$ é ímpar. Logo, o passeio fechado na fronteira de f tem comprimento ímpar. Portanto, o grafo G possui ciclo ímpar. Absurdo!

(II) → (I) Toda face de G tem grau par. Por absurdo, seja C um ciclo ímpar em G. Logo, como toda face tem grau par, C não é fronteira de nenhuma face. Seja H o subgrafo de G induzido por $V(C)$ e os vértices em seu interior. Note que C é fronteira da face externa de H. Além disso, o grau de todas as faces no interior de C continua par. Como a soma dos graus das faces é $2m(G)$, deduzimos que o grau da face externa é par. Isso contradiz a hipótese de que C é ciclo ímpar.

(II) → (III) Toda face de G tem grau par. Sabendo que G^* é um grafo conexo (devido ao vértice universal) e que cada face será um vértice no dual de G. Pelo Teorema 1.5, temos que G^* é Euleriano.

(III) → (II) G^* é Euleriano, segue pelo Teorema 1.5 que toda face de G tem grau par. □

Definição 5.7. Um grafo planar simples é *maximal* se não é subgrafo gerador de nenhum outro grafo planar simples.

Definição 5.8. Uma *triangulação* é um grafo plano simples tal que toda face tem grau 3.

Teorema 5.4. *Seja G um grafo plano simples. São equivalentes:*

(I) $m(G) = 3n(G) - 6$*;*

(II) *G é plano maximal;*

(III) *G é triangulação.*

Demonstração. (I) ⇔ (III) Para um grafo plano simples, a demonstração do Teorema 5.3 mostra que ter $3n(G) - 6$ arestas é equivalente a $2m(G) = 3f(G)$, que ocorre se, e somente se, toda face é 3-ciclo.

(II) ⇔ (III) Existe face que é maior que um 3-ciclo se, e somente se, existe uma maneira de adicionar uma aresta na representação do grafo e obter uma grafo plano simples maior. □

5.1 Coloração de grafos planares

A Proposição 5.3 nos permite provar que todo grafo planar admite uma 6-coloração própria. Defina o *grau médio* de um grafo G, como:

$$\mathrm{Ad}(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d_G(v)}{n(G)} = \frac{2 \cdot m(G)}{n(G)}.$$

Proposição 5.6. *Se G é planar, então* $\delta(G) \leq 5$.

Demonstração. Pela Proposição 5.3, note que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(G) &= \frac{2 \cdot m(G)}{n(G)} \\ &\leq 6 - \frac{12}{n(G)}. \end{aligned}$$

Já que o grau médio é estritamente menor que 6, G possui ao menos um vértice de grau no máximo 5. □

Lembre que a noção de número de coloração, $\mathrm{col}(G)$, foi apresentada na Página 42

Corolário 5.1. *Se G é planar, então* $\chi(G) \leq \mathrm{col}(G) \leq 6$.

Demonstração. Como todo subgrafo de um grafo planar G é planar, note que podemos aplicar a Proposição 5.6 para construir uma ordem $\sigma = (v_1, \ldots, v_n)$ sobre $V(G)$ de modo que cada vértice v_i possui menos de 6 vizinhos no conjunto $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$. Basta tomar o vértice de grau no máximo 5 em G e torná-lo v_n, o último vértice na ordem, e aplicar a mesma ideia recursivamente a $G - v_n$. □

Para demonstrar que grafos planares sempre admitem uma 5-coloração de vértices, é necessário um esforço adicional. Precisamos também da noção a seguir.

Definição 5.9. Dados um grafo G e uma k-coloração própria c de G, uma *a, b-cadeia de Kempe* é um subgrafo maximal conexo $H \subseteq G$ bicolorido com cores a e b, isto é, $a, b \in \{1, \ldots, k\}$, $a \neq b$ e $c(v) \in \{a, b\}$, para todo $v \in V(H)$.

Dados um grafo G, uma k-coloração própria c de G, e uma a, b-cadeia de Kempe $H \subseteq G$, note que ao trocarmos as cores dos vértices em H, ainda obtemos uma k-coloração própria. Mais formalmente, seja $c' : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ tal que:

$$c'(v) = \begin{cases} c(v) & \text{, se } v \notin V(H); \\ a & \text{, se } c(v) = b; \\ b & \text{, se } c(v) = a. \end{cases}$$

Como H é bipartido e H é maximal, com relação a ter vértices com cores a e b, todo vértice u em $V(G) \setminus V(H)$ que possua um vizinho em $V(H)$ tem cor $c(u) \notin \{a, b\}$. Consequentemente, c' é k-coloração própria de G.

Teorema 5.5 (Heawood, 1890)**.** *Se G é um grafo planar (e simples), então $\chi(G) \leq 5$.*

Demonstração. Por absurdo, seja G um grafo plano 6-crítico (veja Página 47). Pela Proposições 4.6 e 5.6, note que $\delta(G) = 5$. Seja v tal que $d_G(v) = 5$ e seja f uma 5-coloração própria de $G - v$. Novamente pela Proposição 4.6, f atribui cada uma das 5 cores para exatamente um dos 5 vizinhos de v. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 os vizinhos de v (no sentido horário ao redor de v). Sem perda de generalidade, considere que $f(v_i) = i$, para todo $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

Seja $H_{1,3}$ a 1, 3-cadeia de Kempe que contém v_1 em $G - v$ com relação à coloração f. Se $v_3 \notin V(H_{1,3}$, note que podemos obter uma 5-coloração própria f' de $G - v$ ao trocarmos as cores dos vértices em $G - v$, e em seguida poderíamos colorir v com a cor 1, nos levando a uma 5-coloração própria de G, uma contradição.

Suponha então que $v_3 \in V(H_{1,3}$. Como $H_{1,3}$ é conexo, note que existe um v_1, v_3-caminho P em $G - v$. Logo, $V(P) \cup \{v\}$ induz um ciclo C em G. Pelo Teorema da Curva de Jordan (Teorema **??**), o ciclo C separa v_2 de v_4 em regiões distintas. Portanto, a 2, 4-cadeia de Kempe $H_{2,4}$ que contém v_2 não pode conter v_4, já que G é plano e, portanto, é uma representação sem cruzamentos. Desse modo, pode-se recolorir os vértices de $H_{2,4}$ e, em seguida, colorir v com a cor 2, para obter uma 5-coloração própria de G, um absurdo. □

Um dos mais famosos resultados em Teoria dos Grafos é o Teorema das Quatro Cores:

Teorema 5.6 (Appel & Haken, 1976)**.** *Se G é um grafo simples e planar, então $\chi(G) \leq 4$.*

5.2 Subdivisões e menores

Lembre que a noção de subdivisão de uma aresta foi apresentada na Definição 3.8, Página 35.

Definição 5.10. *G' é subdivisão* de G se G' é obtido de G pela subdivisão de suas arestas, iterativamente.

Teorema 5.7. *G é planar se, e somente se, suas subdivisões forem planares.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponha que suas subdivisões são planares, note que uma das subdivisões do grafo é o próprio G. Logo, G é planar.

($\Rightarrow$) Se G é planar, note que uma imersão sem cruzamentos de G pode ser usada para obtermos uma imersão plana de qualquer subdivisão do mesmo, usando as mesmas curvas que representam as arestas de G e colocando os novos vértices em pontos sobre essas curvas. □

Teorema 5.8 (Kuratowski, 1930)**.** *G é planar se, e somente se, G não contém subdivisão de K_5 nem de $K_{3,3}$.*

Definição 5.11. Se e=uv (não é laço), então o grafo G/e obtido de G pela *contração* de e é tal que se $w \notin V(G)$:

$$V(G/e) = (V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$$

$$e$$

$$E(G/e) = (E(G) \setminus \{ux, vx \mid x \in V(G)\}) \cup \{wy \mid y \in N_G(u) \cup N_G(v)\}$$

Lema 5.1 (Thomassen)**.** *Se G é planar 3-conexo, então existe $e \in E(G)$ tal que G/e é planar 3-conexo.*

Definição 5.12. Dizemos que H é um menor de G, denotado por $H \preceq G$, se H pode ser obtido de G pela:

- Remoção de vértices;
- Remoção de arestas; e/ou
- Contração de arestas.

Teorema 5.9 (Wagner, 1937)**.** *G é planar se, e somente se, G não contém nem K_5, nem $K_{3,3}$ como menor.*

Observação 5.3. A relação de menor $\preceq$ é uma ordem parcial em qualquer família de grafos G.

Uma *quase-ordem* (ou *pré-ordem*) em um conjunto A é uma relação binária reflexiva e transitiva em A. Note-se que toda relação de equivalência e toda ordem parcial em A são quase-ordens em A. Uma quase-ordem R em A é uma *quase-boa-ordem* em A se, para qualquer sequência infinita $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ de elementos de A, existirem índices $0 \leq i < j$ tais que $(a_i, a_j) \in R$ (ou seja, $a_i R a_j$).

De modo equivalente, pode-se dizer que uma quase-boa-ordem em A é uma quase-ordem R que não possui anti-cadeia infinita nem uma sequência infinita decrescente. Uma terceira forma equivalente, é substituir a condição de não ter sequência infinita decrescente, por exigir que R seja uma relação *bem-fundada*. Uma relação R em um conjunto A é *bem-fundada* se todo subconjunto $B \subseteq A$ não vazio possui elemento minimal com respeito a R.

Desse modo, a relação de menor $\preceq$ é uma quase-ordem em qualquer família de grafos $\mathcal{G}$. Além disso, é também uma relação anti-simétrica em $\mathcal{G}$ ao tomarmos isomorfismo, no lugar de igualdade, em usa definição. Ou seja, de fato é verdade que se $G_1 \preceq G_2$ e $G_2 \preceq G_1$, então $G_1 \cong G_2$. Deste modo, pode-se considerar que $\preceq$ é uma ordem parcial em qualquer família de grafos $\mathcal{G}$.

Como as operações de remoção de vértices, arestas, e contração de arestas necessariamente diminuem o número inteiro não-negativo correspondendo ao total de elementos (vértices e arestas) de um dado grafo G em uma unidade, não é possível ter uma sequência de grafos infinita decrescente, com respeito a relação de menor.

Já mostrar que não é possível ter uma sequência infinita de grafos incomparáveis pela relação de menor, exigiu um trabalho colossal de mais de 500 páginas em uma série de 20 artigos publicados de 1983 a 2004 pelos seguintes autores:

Teorema 5.10 (Robertson & Seymour, 2004)**.** *A relação de menor $\preceq$ é uma quase-boa-ordenação de qualquer família (infinita) de grafos.*

5.3 Grafos periplanares

Definição 5.13. Um grafo G é *periplanar* se admite imersão no plano sem cruzamentos de modo que todo vértice pertença à face externa.

Definição 5.14. Um grafo periplanar é *maximal* se não é subgrafo gerador de outro grafo periplanar.

Proposição 5.7. *K_4 e $K_{2,3}$ não são periplanares.*

Demonstração. Note que K_4 e $K_{2,3}$ são 2-conexos. Uma imersão do periplano admite um ciclo gerador. Não há nenhum ciclo gerador de $K_{2,3}$, pois ele seria um 5-ciclo em um grafo bipartido. Para K_4, existe um ciclo gerador, porém as extremidades das duas arestas restantes alternariam no ciclo. Como essas cordas possuem cruzamentos e não podem ser representadas ambas internamente. Ao representar a corda externamente, acabamos por separar um vértice da face externa. Logo, K_4 não é periplanar. □

Proposição 5.8. *Se G é periplano 2-conexo, então a fronteira da face externa é ciclo.*

Demonstração. A fronteira da face externa contém todos os vértices. Se ela não é um ciclo, então ela passa por algum vértice mais de uma vez. Logo, teríamos uma articulação em G. Absurdo! □

Proposição 5.9. *Se G é periplanar simples e $n(G) \geq 4$, então G possui 2 vértices de grau no máximo 2 que não são adjacentes.*

Teorema 5.11. *G é periplanar se, e somente se, G não contém subdivisão de K_4 ou $K_{2,3}$.*

Teorema 5.12. *Se G é periplanar, então $\chi(G) \leq 3$.*

5.4 Exercícios

Questão 5.1. Prove ou mostre um contra-exemplo:

(a) [West, 6.1.5] Um grafo planar G possui articulação se, e somente se, o dual G^* de qualquer representação de G também possui.

(b) [West, 6.1.7] Todo grafo periplanar maximal é 2-conexo.

(c) [West, 6.1.9] Todo grafo planar com menos de 13 vértices é 4-degenerado.

(d) [West, 6.1.10] Existe grafo G planar e bipartido tal que $\delta(G) \geq 4$.

(e) [West, 6.1.11] Se G é planar maximal, então G^* é 2-aresta-conexo e 3-regular.

(f) [West, 6.1.17] Se G é 2-conexo, simples, planar e $\delta(G) \geq 3$, então G^* é simples.

(g) [West, 6.1.22] O dual fraco de um grafo periplanar é uma floresta.

Questão 5.2. Resolva as questões a seguir:

(a) [West, 6.1.20] Prove por indução no número de faces que G é bipartido se, e somente se, cada face tem grau par.

(b) [West, 6.1.26] Determine a maior quantidade de arestas de um grafo periplanar simples com n vértices.

(c) [West, 6.1.30] Seja G um grafo simples, planar, com n vértices, cintura k e 2-aresta-conexo. Mostre que G tem no máximo $(n-2)\frac{k}{k-2}$ arestas. Deduza que o grafo de Petersen não é planar.

(d) [West, 6.2.2] Prove que o grafo de Petersen não é planar usando o Teorema de Kuratowski.

(e) [West, 6.2.7] Use o Teorema de Kuratowski para demonstrar que G é periplanar se, e somente se, G não contém uma subdivisão de K_4 ou $K_{2,3}$.

(f) [West, 6.3.3] Use o Teorema das 4 Cores para demonstrar que se G é periplanar, então $\chi(G) \leq 3$.

Capítulo 6

Ciclos Hamiltonianos

Enquanto que a busca de por uma trilha Euleriana, ou seja uma trilha fechada que contenha todas as arestas do grafo, seja um problema bem resolvido, a versão similar para vértices é um problema muito mais complicado.

Um ciclo C em um grafo G é *Hamiltoniano* se $V(C) = V(G)$. Já um *caminho Hamiltoniano* em um grafo G é um caminho que passa por todos os vértices de G (uma única vez). Apresentamos a seguir condições necessárias, e condições suficientes para a existência de tal ciclo ou caminho.

6.1 Condições necessárias

Todo grafo que possui um ciclo Hamiltoniano é 2-conexo, pois, além de obviamente ter que ser conexo, a após remoção de qualquer vértice ainda resta um subgrafo com um caminho Hamiltoniano. Se o grafo é bipartido, então um ciclo gerador deve alternar entre os dois conjuntos que particionam o grafo, logo para completar o ciclo Hamiltoniano deve-se ter os conjuntos com a mesma cardinalidade.

Proposição 6.1. *Se G tem um ciclo Hamiltoniano, então para todo conjunto não-vazio $S \subseteq V(G)$, o grafo $G - S$ tem no máximo $|S|$ componentes.*

Demonstração. Quando estamos em uma componente de $G - S$, para sair dela, o ciclo Hamiltoniano de G tem que ir pelo conjunto S. Note que cada chegada no conjunto S deve usar vértices distintos. Logo, S deve ter pelo menos o número de componentes de $G - S$. □

6.2 Condições suficientes

Teorema 6.1 (Dirac, 1952)**.** *Se G é simples, $n(G) \geq 3$ e $\delta(G) \geq n(G)/2$, então G é Hamiltoniano.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que $n(G) \geq 3$, $\delta(G) \geq n(G)/2$ e G não é Hamiltoniano. Sem perda de generalidade, suponha que G é maximal em arestas. Como G não é completo, já que G não é Hamiltoniano, sejam $u, v \in V(G)$ tal que $uv \notin E(G)$. Pela maximalidade de G, $G + uv$ é Hamiltoniano. Logo, G possui um u,v-caminho Hamiltoniano P ($u = v_1 v_2 \dots v_n = v$).

Definindo $S = \{i \mid v_{i+1} \in N(u)\}$ e $T = \{i \mid v_i \in N(v)\}$. Note que se $S \cap T \neq \emptyset$, logo teremos um ciclo Hamiltoniano da seguinte forma: $u = v_1 \dots v_i v v_{n-1} \dots v_{i+1} u$ Se $S \cap T = \emptyset$, logo:

$$|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| = d_G(u) + d_G(v) \geq n(G)$$

Note que $n \notin S \cup T$. Portanto, $|S \cup T| \leq n(G) - 1$ e teremos $|S \cap T| \geq 1$. Absurdo! □

Teorema 6.2 (Ore, 1960)**.** *Seja G simples e sejam $u, v \in V(G)$ tais que $d_G(u) + d_G(v) \geq n(G)$. Então:*

G é Hamiltoniano se, e somente se, G + uv é Hamiltoniano.

Demonstração. Uma direção é trivial, e a outra direção é provada da mesma forma do Teorema 6.1 (Dirac). □

Definição 6.1. O *fecho* de um grafo G é obtido de G pela adição de arestas entre vértices não adjacentes tal que $d_G(u) + d_G(v) \geq n(G)$, iterativamente. Denotamos o fecho de G sendo $C(G)$.

Definição 6.2. G é *fechado* se $C(G) = G$.

Teorema 6.3 (Bondy-Chvátal, 1976)**.** *G é Hamiltoniano se, e somente se, $C(G)$ é Hamiltoniano.*

Lema 6.1. *$C(G)$ é bem definido.*

Demonstração. Sejam $e_1, \dots, e_r$ e $f_1, \dots, f_s$ as sequências de arestas adicionadas na formação de $C(G)$, a primeira resultando em G_1 e a segunda em G_2. Se em qualquer sequência vértices não adjacentes u e v adquirem grau somando pelo menos $n(G)$, então a aresta uv deve ser adicionada antes que a sequência termine.

Assim, f_1, sendo inicialmente adicionável a G, deve pertencer a G_1. Similarmente, se $f_1, \dots, f_{i-1} \in E(G_1)$, então f_i se torna adicionável a G_1 e, portanto, pertence a G_1. Logo, nenhuma sequência contém uma primeira aresta omitida pela outra sequência, e temos $G_1 \subseteq G_2$ e $G_2 \subseteq G_1$. □

Teorema 6.4 (Chvátal, 1972)**.** *Seja G simples com sequência de graus $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Se para todo $i < n(G)/2$ implica $d_i > i$ ou $d_{n-i} \geq n - i$, então G é Hamiltoniano.*

Demonstração. Suponha que a condição de Chvátal é satisfeita para G. Note que $C(G)$ também satisfaz a condição de Chvátal. Logo, vamos assumir que $G = C(G)$. Devemos provar que $G = C(G)$ é Hamiltoniano e, para tanto, vamos mostrar que $C(G)$ é completo.

Pela contra-positiva, temos que mostrar que se $G = C(G)$ e G não completo, então G não satisfaz a condição de Chvátal, isto é, devemos mostrar que existe $i < n(G)/2$ tal que:

- Existem i vértices de grau $\leq i$; e
- Existem $n(G) - i$ vértices de grau $< n(G) - i$.

Sejam $u, v \in V(G)$ tais que $uv \notin E(G)$ e $d_G(u) + d_G(v)$ é a maior possível. Como $G = C(G)$, temos que $d_G(u) + d_G(v) < n(G)$. Sem perda de generalidade, suponha que $d_G(u) \leq d_G(v)$. Logo, $d_G(u) < n(G)/2$.

Seja $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ a sequência de graus de G. Seja $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $i = d_G(u)$. Para cada não-vizinho w de v, temos que $d_G(w) \leq d_G(u) = i$. Como $d_G(v) < n(G) - d_G(u) = n(G) - i$, v tem pelo menos i não-vizinhos.

Cada não-vizinho de u tem grau $\leq d_G(v) < n(G) - i$. Note que u tem $(n(G) - 1 - d_G(u))$ não-vizinhos, isto é, $(n(G) - 1 - i)$ não-vizinhos. Como $d_G(u) \leq d_G(v) < n(G) - i$, os vértices não-vizinhos de u e o próprio u completam os $n(G) - i$ vértices de grau $< n(G) - i$. □

Teorema 6.5 (Chvátal-Erdős)**.** *Se G é um grafo simples tal que $G \ncong K_2$ e $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, então G é Hamiltoniano.*

Demonstração. Seja C o maior ciclo de G. Seja $k = \kappa(G) \geq 2$. Pelo Teorema 3.5 (Whitney), $\delta(G) \geq k = \kappa(G) \geq 2$. Como $\delta(G) \geq k$, temos que C possui ao menos $k + 1$ vértices. Caso C não seja Hamiltoniano, seja H uma componente de $G - C$.

Como $\kappa(G) = k$, C possui k vértices com vizinhos em H. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tais vértices em ordem (relativa a C). Note que $u_i u_{i+1} \notin E(C)$, pois caso contrário, haveria ciclo C' maior que C usando todos os vértices de C e os vértices de um caminho em H entre os vizinhos de u_i e u_{i+1}.

Seja a_i o sucessor de u_i em C. Pelo mesmo argumento anterior, nenhum vértice a_i possui vizinho em H. Além disso, note que $a_i a_j \notin E(G)$, pois o ciclo $C' = u_i H u_j C a_i a_j C u_i$ é maior que C. Entretanto, o conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, h\}$, para qualquer $h \in V(H)$, é independente. Isso contradiz a hipótese de que $\alpha(G) \leq \kappa(G) = k$, logo C é Hamiltoniano. □

6.3 Caminho Hamiltoniano

Proposição 6.2. *G possui um caminho Hamiltoniano se, e somente se, $G + uv$, com $N(u) = V(G)$, possui um ciclo Hamiltoniano.*

Teorema 6.6. *Se G é simples conexo e $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ é sua sequência de graus tal que:*
Para todo $i < (n + 1)/2$, temos $d_i \geq i$ ou $d_{n-i+1} \geq n - i$.
Então G possui caminho Hamiltoniano.

Demonstração. Seja $G^* = G + u$ tal que u é universal ($N(u) = V(G)$). Pela Proposição 6.2, vamos provar que G^* possui um ciclo Hamiltoniano. Vamos mostrar que G^* satisfaz as condições de Chvátal. Note que $d_1* \leq \ldots \leq d_{n(G)}* \leq d_{n(G)+1}*$ é tal que $d_i* = d_i + 1$, para todo $i \in \{1, \ldots, n(G)\}$ e $d_{n(G)+1}* = n(G) = d_{G^*}(u)$. Note que, para todo $i < n(G^*)/2 = (n(G) + 1)/2$:

$d_i* = d_i + 1 \geq i + 1 > i$ ou $d_{n(G^*)-i} + 1 = d_{n(G)+1-i} + 1 \geq n(G) + 1 - i > n(G) - i$.

Logo, a Condição de Chvátal é satisfeita e, portanto, G^* possui um ciclo Hamiltoniano. □

6.4 Exercícios

Questão 6.1. Resolva as questões a seguir:

(a) [West, 7.2.1] Para quais valores de r o grafo $K_{r,r}$ é Hamiltoniano?

(b) [West, 7.2.2] O grafo de Grötzsch é Hamiltoniano? E o de Petersen? Justifique.

(c) [West, 7.2.4] Prove que se G possui um caminho Hamiltoniano, então, para cada $S \subseteq V(G)$, a quantidade de componentes de $G - S$ é no máximo $|S| + 1$.

(d) [West, 7.2.6] Seja G um grafo Hamiltoniano bipartido. Mostre que $G - x - y$ tem emparelhamento perfeito se, e somente se, x e y estão em lados opostos da bipartição de G.

(e) [West, 7.2.14] Prove que todo grafo 3-regular que admite uma única 3-coloração em arestas é Hamiltoniano.

(f) [West, 7.2.17] Prove que o produto cartesiano de dois grafos Hamiltonianos é Hamiltoniano. Deduza que Q_k, para todo $k \geq 2$ (hipercubo de dimensão k) é Hamiltoniano.

Glossário de Termos

k-conexo
    em arcos, 38
    em arestas, 36
k-cromático, 41

algoritmo
    first-fit, 42
    guloso de coloração, 42
alça, 35
arco
    múltiplo, 20
arcos, 20
aresta, 7
    de corte, 14
    incidente, 7
    múltipla, 9
    paralela, 9
articulação, 14

bloco, 32
    -folha, 33

cabeça, 20
cadeia de Kempe, 59
caminho, 11
    alternante, 26
    aumentante, 26
    em um grafo, 12
    hamiltoniano, 65
    internamente disjunto, 33
cauda, 20
ciclo, 11
    em um grafo, 12
    hamiltoniano, 65
    par, 12
    ímpar, 12
cintura, 12
circuito, 20
classe
    de cor, 41
clique, 11

cobertura
    por arestas, 29
    por vértices, 28
coloração, 41
    de arestas, 51
        própria, 51
    de vértices, 41
    gulosa, 42
    própria, 41
    ótima, 41
complemento, 10
componente, 13
    fortemente conexa, 20
comprimento, 12
comprimento da face, 56
conectividade
    em arcos, 38
    em arestas, 36
    em um digrafo, 38
    em vértices, 31
conexo
    fortemente, 20
    fracamente, 20
conjunto
    aberto, 55
    estável, 11, 41
    independente, 11
construção
    de Mycielski, 45
contração de arestas, 61
corda
    em um ciclo, 47
corte
    de arcos, 38
    de arestas, 36
    de vértices, 31, 36, 38
curva, 55
    fechada, 55
    poligonal, 55
    simples, 55

decomposição, 17
degeneração, 42
desconectante, 36
diferença
  simétrica, 26
digrafo, 20
  Euleriano, 21
  simples, 20
distância, 12
dual, 56
  fraco, 56

emparelhamento, 25
  maximal, 26
  máximo, 26
  perfeito, 25
estrela, 17
extremidades, 7, 20
  de um caminho, 12

face, 55
fator, 28
fecho, 66
floresta, 17
folha, 17
fronteira, 55
função
  de incidência, 7

galáxia, 17
grafo, 7
  de Grötzch, 46
  acíclico, 17
  bipartido, 11
    completo, 11
  complementar, 10
  completo, 11
  conexo, 13
  construtível, 49
  d-degenerado, 42
  de blocos, 32
  de classe 1, 52
  de classe 2, 52
  de intervalos, 47
  de Petersen, 15
  desconexo, 13
  direcionado, 20
  Euleriano, 15
  fechado, 66
  finito, 9
  k-crítico, 47
  linha, 51
  nulo, 9
  orientado, 21
  par, 10
  perfeito, 46
  periplanar, 62
    maximal, 62
  planar, 55
    maximal, 58
  plano, 55
  regular, 10
  sem rótulos, 12
  simples, 9
  subjacente, 20
  trivial, 9
  vazio, 9
  ímpar, 10
grau, 9
  de entrada, 20
  de saída, 20
  médio, 59
grau da face, 56

imersão, 55
isomorfismo, 11

laço, 9, 20
ligação, 37
livre, 11

matriz
  adjacência, 8
  incidência, 8

nó, 17
número
  cromático, 41
  de coloração, 42
  de Grundy, 43
  guloso, 43

ordem
  de um grafo, 9
orelha, 35
orientação, 21

partes, 11
passeio, 12
  fechado, 12
ponte, 14

predecessor, 20
produto
    cartesiano, 75
pré-ordem, 61

quase
    -boa-ordem, 61
    -ordem, 61

região, 55
representação, 55

separador, 31, 36, 38
subdivisão
    de outro grafo, 60
    de uma aresta, 35
subgrafo, 10
    gerador, 10
    induzido, 11
sucessor, 20

tamanho
    de um grafo, 9
torneio, 21
triangulação, 58
trilha, 12
    Euleriana, 15, 21
    fechada, 12

vizinhança, 10
    de entrada, 20
    de saída, 20
vértice, 7
    adjacente, 7
    de corte, 14
    insaturado, 25
    isolado, 9
    saturado, 25
    vizinho, 7

árvore, 17
    geradora, 17
índice
    cromático, 51

Bibliografia

J. Bondy and U. Murty. *Graph Theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2008. ISBN 1846289696.

P. Erdős and A. Hajnal. On chromatic number of graphs and set-systems. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 17(1):61–99, Mar 1966. ISSN 1588-2632. doi: 10.1007/BF02020444. URL https://doi.org/10.1007/BF02020444.

D. R. Lick and A. T. White. k-degenerate graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 22(5):1082–1096, 1970. doi: 10.4153/CJM-1970-125-1.

D. B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, New Delhi, 2nd ed. edition, 2001.

Outras definições

Definição 6.3. O *produto cartesiano* dos grafos G e H é o grafo $G\square H$ cujo conjunto de vértices é $V(G) \times V(H)$ e (u_1, u_2) é adjacente a (v_1, v_2) se:

- $u_1 = v_1$ e $u_2v_2 \in E(H)$; ou
- $u_2 = v_2$ e $u_1v_1 \in E(G)$.