Comprimento, integrais de linha e o Teorema de Green

Aviso. Estas notas foram elaboradas com apoio de um modelo de linguagem (IA), a partir do conteúdo apresentado em aula e da bibliografia do curso, e foram revisadas pelo professor.

Da aula passada trazemos os *caminhos suaves por partes* e as *curvas de Jordan*, ao longo dos quais vamos agora medir distância e integrar, e os *domínios*, onde as funções que integraremos vão viver. O plano de hoje é usar essas duas peças: primeiro medimos o comprimento de um caminho; depois definimos a integral de uma aplicação ao longo dele; e por fim enunciamos a relação entre as duas, o *Teorema de Green*, que converte uma integral ao longo da fronteira de uma região em uma integral dupla sobre o seu interior.

Como nas aulas anteriores, vale o alerta: nada aqui é propriamente complexo. Trabalharemos com aplicações $f : A \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, definidas em um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, e escreveremos indiferentemente (x, y) ou $z = x + iy$; a estrutura de corpo de $\mathbb{C}$ não desempenha papel algum no que segue.

1 Comprimento de um caminho

Definição 1.1. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é um caminho suave, o seu *comprimento* é

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Se $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_n$ é suave por partes, põe-se $\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \cdots + \ell(\gamma_n)$.

A fórmula é a do Cálculo, e a interpretação também: $|\gamma'(t)|$ é a velocidade escalar com que o ponto $\gamma(t)$ se move, e $\ell(\gamma)$ é a distância efetivamente percorrida por ele quando t varia de a até b.

Exemplo 1.2. Para o círculo $\gamma(t) = z_0 + r \operatorname{cis} t$, $t \in [0, 2\pi]$, temos $|\gamma'(t)| = r$ e

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r,$$

como devia ser. Para o segmento $\gamma(t) = (1-t)z_0 + t\, z_1$ vale $|\gamma'(t)| = |z_1 - z_0|$ e $\ell(\gamma) = |z_1 - z_0|$: o comprimento é a distância entre as extremidades.

Já para $\sigma(t) = \operatorname{cis}(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$, o traço é o mesmo círculo unitário, mas $|\sigma'(t)| = 2$ e $\ell(\sigma) = 4\pi$. Isso não é um defeito da definição: o comprimento é uma propriedade do *caminho*, não do traço, e conta quantas vezes cada trecho é percorrido. Note ainda que a reparametrização linear vista na Aula 5 não muda o comprimento: ela só reescala o intervalo de parâmetros, e a mudança de variáveis na integral cancela exatamente esse fator.

Observação 1.3 (o traço de um caminho é compacto). Uma observação que usaremos o tempo todo a partir de agora: o traço de um caminho é fechado e limitado, por ser imagem

contínua do compacto $[a,b]$. Assim, uma função contínua f definida sobre o traço de um caminho é automaticamente limitada nele, e o número $M = \max_{p\in\gamma([a,b])} |f(p)|$ faz sentido. Junto com o comprimento $\ell(\gamma)$, esse máximo vai aparecer na estimativa mais usada de toda a teoria de Cauchy.

2 Integrais de linha

Somar os valores de uma aplicação ao longo de um caminho: essa é a ideia. O que se integra não é a aplicação sozinha, e sim a sua interação com a direção em que se caminha, razão pela qual a definição envolve $x'(t)$ e $y'(t)$.

Definição 2.1. Sejam $f = (u, v) : A \to \mathbb{R}^2$ contínua em um aberto A e $\gamma : [a,b] \to A$ um caminho suave, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. A *integral de linha* de f ao longo de γ é

$$\int_\gamma f = \int_\gamma u\,dx + v\,dy := \int_a^b \Big[u(x(t),y(t))\,x'(t) + v(x(t),y(t))\,y'(t)\Big]dt.$$

Se $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$ é suave por partes, põe-se

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f.$$

Quando o caminho é fechado, costuma-se escrever $\oint_\gamma f$.

A notação $\int_\gamma u\,dx + v\,dy$ é uma receita literal de cálculo: substitua x por $x(t)$, y por $y(t)$, dx por $x'(t)\,dt$, dy por $y'(t)\,dt$, e integre em t entre a e b. Feita a substituição, sobra uma integral de uma variável, das que se calculam no Cálculo I.

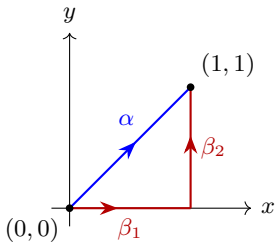
Exemplo 2.2. Sejam $f(x,y) = (y,\, x)$ e $\gamma(t) = (t,\, t^2)$, $t \in [0,1]$, o arco de parábola de $(0,0)$ a $(1,1)$. Como $x'(t) = 1$ e $y'(t) = 2t$,

$$\int_\gamma f = \int_0^1 \big[t^2 \cdot 1 + t \cdot 2t\big]dt = \int_0^1 3t^2\,dt = 1.$$

Exemplo 2.3 (a integral depende do caminho)**.** Tome agora $f(x,y) = (0,\, x)$ e dois caminhos de $(0,0)$ a $(1,1)$:

- o segmento $\alpha(t) = (t,t)$, $t \in [0,1]$, para o qual $\int_\alpha f = \int_0^1 \big[0 \cdot 1 + t \cdot 1\big]dt = \frac{1}{2}$;
- o caminho quebrado $\beta = \beta_1 * \beta_2$ com $\beta_1(t) = (t,0)$ e $\beta_2(t) = (1,t)$, $t \in [0,1]$. Em β_1 temos $y' = 0$ e $u = 0$, logo a contribuição é nula; em β_2 temos $x' = 0$, $y' = 1$ e $v = x = 1$, logo $\int_{\beta_2} f = \int_0^1 1\,dt = 1$. Portanto $\int_\beta f = 1$.

Os dois caminhos ligam os mesmos pontos e dão resultados diferentes: *a integral de linha depende do caminho*, e não apenas de seus extremos. Descobrir em que circunstâncias essa dependência desaparece é, essencialmente, o programa dos Capítulos 5 e 6.



Proposição 2.4. *Sejam f, g contínuas em A e γ um caminho suave por partes em A. Então:*

(a) $\displaystyle\int_\gamma (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_\gamma f + \mu \int_\gamma g$ *para* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

(b) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$*, onde* γ^- *é o caminho reverso;*

(c) a integral não muda se γ *for reparametrizado preservando o sentido de percurso;*

(d) $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \le M\,\ell(\gamma)$*, onde* $M = \max_{p\in\gamma([a,b])} |f(p)|$.

Demonstração. (a) é a linearidade da integral em $[a, b]$. Para (b), escreva $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ e faça a substituição $s = a+b-t$ na integral: aparece um sinal de $ds = -dt$ e os limites de integração se invertem, o que dá exatamente $-\int_\gamma f$. O item (c) é a fórmula de mudança de variáveis, pelo mesmo cálculo.

Para (d), lembre que $|ux' + vy'| \le |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|$ (é a desigualdade de Cauchy–Schwarz para o produto escalar dos vetores (u, v) e (x', y')), e integre:

$$\left|\int_\gamma f\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \le M \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M\,\ell(\gamma).$$

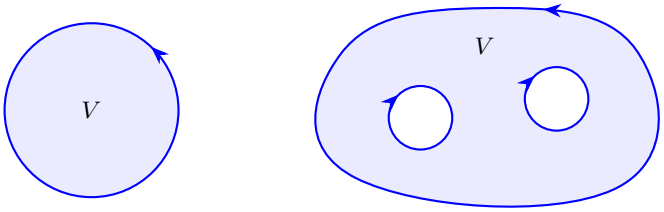
O máximo M existe pela Observação 1.3. □

Os itens (b) e (c) dizem que a integral de linha não depende da parametrização escolhida, mas depende do *sentido* em que se percorre a curva: inverter o sentido troca o sinal. Por isso, ao integrar sobre uma curva fechada, é indispensável dizer em que sentido ela é percorrida. É o que faremos agora.

3 Orientação compatível

Definição 3.1. Seja $V \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto fechado e limitado cuja fronteira ∂V é formada por um número finito de curvas de Jordan suaves por partes e tal que $V \setminus \partial V$ é um domínio. Dizemos que V e ∂V têm *orientação compatível* quando cada uma dessas curvas é percorrida de modo que o interior de V fique sempre *à esquerda* de quem caminha.

Na prática: a curva externa é percorrida no sentido anti-horário e cada curva que contorna um buraco, no sentido horário. Para o disco $\overline{D}(z_0, r)$, cuja fronteira é um único círculo, a orientação compatível é a anti-horária.



um disco uma região com dois buracos

Quando a fronteira tem várias curvas, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, convencionamos que

$$\int_{\partial V} f = \int_{\gamma_1} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f,$$

cada uma percorrida no sentido compatível com V.

4 O Teorema de Green

Falta uma última hipótese para enunciar o teorema: a aplicação $f = (u, v)$ precisa ser *suave*, no sentido de que as quatro derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existem e são contínuas no aberto onde f está definida. É a mesma hipótese de derivabilidade do Cálculo II, e é a única forma de derivada, além da dos caminhos, de que precisaremos neste capítulo.

Teorema 4.1 (Green)**.** *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e $f = (u, v) : U \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação suave. Seja $V \subseteq U$ um conjunto satisfazendo: (i) V é fechado e limitado; (ii) a fronteira ∂V é formada por um número finito de curvas de Jordan suaves por partes, $\partial V = \gamma_1 * \cdots * \gamma_n$; e (iii) $V \smallsetminus \partial V$ é um domínio. Suponha que V e ∂V estejam orientados compativelmente. Então*

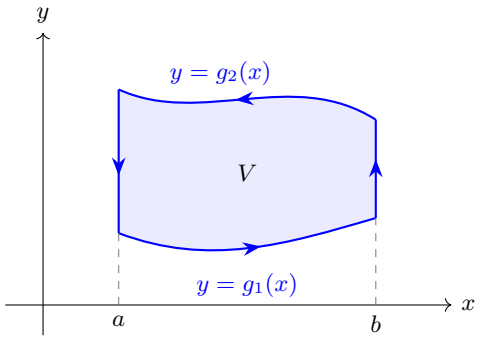
$$\int_{\partial V} u\,dx + v\,dy = \iint_V \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Em palavras: uma integral ao longo da *borda* é igual a uma integral dupla sobre o *interior*. É a versão bidimensional da ideia do Teorema Fundamental do Cálculo, onde $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$ troca uma integral no intervalo por valores nos extremos.

A demonstração no caso geral exige mais recursos do que temos aqui; ela pode ser encontrada em textos de Análise no $\mathbb{R}^n$. Demonstraremos o teorema em um caso particular (suficientemente geral para todas as aplicações do curso) em que a região pode ser descrita das duas maneiras seguintes ao mesmo tempo:

$$\text{(I)} \quad V = \{(x, y) : \ a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$
$$\text{(II)} \quad V = \{(x, y) : \ c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

onde $g_1 \le g_2$ e $h_1 \le h_2$ têm gráficos suaves por partes. Discos fechados, retângulos, triângulos e polígonos regulares são desse tipo; e uma região mais complicada pode, em geral, ser cortada em um número finito de pedaços assim.



Demonstração no caso descrito acima. Vamos provar separadamente as duas igualdades

$$\int_{\partial V} u\,dx = -\iint_V \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy \qquad \text{e} \qquad \int_{\partial V} v\,dy = \iint_V \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy,$$

cuja soma é o enunciado.

Para a primeira, usamos a descrição (I). A fronteira de V, percorrida compativelmente, é formada por quatro caminhos: o gráfico inferior $\gamma_1(t) = (t, g_1(t))$, com t de a a b; o segmento vertical em $x = b$, subindo; o gráfico superior $\gamma_3(t) = (t, g_2(t))$, percorrido *ao contrário*, isto é, γ_3^-; e o segmento vertical em $x = a$, descendo. Nos dois segmentos verticais a coordenada x é constante, logo $x'(t) = 0$ e as integrais de $u\,dx$ ali são nulas. Sobram os dois gráficos, parametrizados por $x = t$, para os quais $x'(t) = 1$:

$$\int_{\partial V} u\,dx = \int_a^b u(t, g_1(t))dt - \int_a^b u(t, g_2(t))dt,$$

o sinal negativo vindo do item (b) da Proposição 2.4, já que o gráfico superior é percorrido de b para a.

Por outro lado, integrando primeiro em y (é aqui que se usa a descrição (I)) e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo à variável y,

$$\iint_V \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\,dy \right) dx = \int_a^b \Big[u(x, g_2(x)) - u(x, g_1(x)) \Big] dx.$$

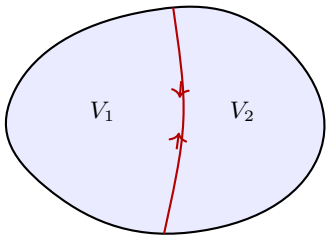
Comparando as duas expressões, obtemos a primeira igualdade.

A segunda é o mesmo argumento com os papéis de x e y trocados, usando a descrição (II): agora são os dois segmentos horizontais que não contribuem, porque neles $y'(t) = 0$, e sobram os gráficos $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$, que produzem

$$\int_{\partial V} v\,dy = \int_c^d \Big[v(h_2(y), y) - v(h_1(y), y) \Big] dy = \iint_V \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy. \qquad \square$$

Observação 4.2. Quando V não é de um dos tipos acima, mas pode ser cortada em pedaços que são, aplica-se o que acabamos de provar a cada pedaço e somam-se os resultados. Cada corte introduzido é percorrido *duas vezes, em sentidos opostos* (uma vez pela fronteira de cada pedaço vizinho), de modo que essas contribuições se cancelam, pelo item (b) da Proposição 2.4. Sobra exatamente a integral ao longo de ∂V, enquanto as integrais duplas

se somam para dar a integral sobre V.



Exemplo 4.3 (conferindo o teorema)**.** Sejam $f(x,y) = (-y,\, x)$ e $V = \overline{D}(0,r)$, o disco fechado de centro na origem e raio r. Do lado da fronteira, parametrizando o círculo por $\gamma(t) = (r\cos t,\, r\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (sentido anti-horário, que é o compatível), temos $u = -r\,\mathrm{sen}\, t$, $v = r\cos t$, $x' = -r\,\mathrm{sen}\, t$ e $y' = r\cos t$, donde

$$\int_{\partial V} u\,dx + v\,dy = \int_0^{2\pi} \left[r^2\,\mathrm{sen}^2\, t + r^2\cos^2 t\right] dt = 2\pi r^2.$$

Do lado da integral dupla, $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$, logo

$$\iint_V 2\,dx\,dy = 2 \cdot \text{área}(V) = 2\pi r^2.$$

Os dois lados coincidem, como devia ser.

Corolário 4.4 (área por integral de linha)**.** *Nas hipóteses do Teorema 4.1,*

$$\textit{área}(V) = \frac{1}{2}\int_{\partial V} (-y)\,dx + x\,dy.$$

Demonstração. Aplique o teorema a $f(x,y) = (-y, x)$, para a qual $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2$, como no Exemplo 4.3. □

Exemplo 4.5. Para a elipse de semieixos $a, b > 0$, dada por $\gamma(t) = (a\cos t,\, b\,\mathrm{sen}\, t)$ com $t \in [0, 2\pi]$,

$$(-y)\,dx + x\,dy = \left[ab\,\mathrm{sen}^2\, t + ab\cos^2 t\right] dt = ab\,dt,$$

e a área encerrada é $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$.

5 O que vem a seguir

Com isso encerramos o Capítulo 2. Reunimos, nas últimas três aulas, todo o cenário em que o cálculo no plano acontece: os domínios, os caminhos suaves por partes, e agora as ferramentas de medir e integrar ao longo deles, coroadas pelo Teorema de Green. A partir da próxima aula o assunto é o Capítulo 3: funções complexas de variável complexa e a derivada

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}, \qquad h \in \mathbb{C}.$$

Veremos que exigir a existência desse limite (com h tendendo a zero por qualquer direção do plano) impõe às partes real e imaginária de f um par de equações conhecidas como *equações de Cauchy–Riemann*, intimamente ligadas ao integrando $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ que acabamos de ver no Teorema de Green. As funções que cumprem essa exigência são as *funções holomorfas*, e o resto do curso é a exploração das suas propriedades, todas surpreendentes.