Conjugado, módulo e forma polar

Aviso. Estas notas foram geradas por inteligência artificial a partir do conteúdo apresentado em sala e da bibliografia do curso. Podem conter erros ou imprecisões; em caso de dúvida, consulte o livro-texto indicado no plano de ensino.

Na aula passada construímos $\mathbb{C}$ como o conjunto dos pares ordenados de números reais, com a soma coordenada a coordenada e o produto $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\, ad+bc)$, e vimos que, escrevendo $i = (0,1)$, todo número complexo se escreve de maneira única na forma $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Nesta aula desenvolvemos as ferramentas básicas para trabalhar com esses números: conjugado, módulo, divisão e, sobretudo, a *forma polar* — o momento em que a álgebra de $\mathbb{C}$ vira geometria do plano.

1 Parte real, parte imaginária e potências de i

Definição 1.1. Se $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, chamamos a de *parte real* e b de *parte imaginária* de z, e escrevemos $\mathrm{Re}(z) = a$ e $\mathrm{Im}(z) = b$. Quando $b = 0$ dizemos que z é real; quando $a = 0$ e $b \neq 0$, que z é um *imaginário puro*.

Note que $\mathrm{Im}(z)$ é um número *real*: a parte imaginária de $3 - 5i$ é -5, e não $-5i$. Como a escrita $a + bi$ é única, dois complexos são iguais exatamente quando têm a mesma parte real e a mesma parte imaginária — uma equação em $\mathbb{C}$ equivale a duas equações em $\mathbb{R}$.

Somar e multiplicar se faz como em $\mathbb{R}$, trocando i^2 por -1:

$$(2+3i) + (1-5i) = 3 - 2i, \qquad (2+3i)(1-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i.$$

Proposição 1.2 (potências de i)**.** *Vale $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, e $i^{n+4} = i^n$ para todo n. Logo i^n depende apenas do resto da divisão de n por 4.*

Demonstração. $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ e $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$; portanto $i^{n+4} = i^n \cdot i^4 = i^n$. □

Exemplo 1.3. $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, logo $i^{2026} = i^2 = -1$.

2 Conjugado

Definição 2.1. O *conjugado* de $z = a + bi$ é $\bar{z} = a - bi$.

Proposição 2.2. *Para todos $z, w \in \mathbb{C}$:*

(a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ *e* $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$*;*

(b) $\bar{\bar{z}} = z$*;*

(c) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ *e* $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$*; em particular* $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ *e* $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$*;*

(d) $z \in \mathbb{R}$ *se, e somente se,* $\bar{z} = z$*; e z é imaginário puro se, e somente se,* $\bar{z} = -z$ *e* $z \neq 0$*;*

(e) $z\bar{z} = a^2 + b^2$*, um número real não negativo, nulo apenas quando* $z = 0$*.*

Demonstração. Escreva $z = a + bi$ e $w = c + di$. Para a primeira parte de (a), $\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c) - (b+d)i = \bar{z} + \bar{w}$. Para a segunda,

$$\overline{zw} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i,$$

ao passo que $\bar{z}\,\bar{w} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd) - (ad+bc)i$; são iguais. Os itens (b), (c) e (d) saem diretamente da definição. Para (e), $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$, e uma soma de quadrados de reais só é nula quando ambos são nulos. □

O item (a) diz que a conjugação respeita as duas operações: ela é um *automorfismo* do corpo $\mathbb{C}$, que fixa $\mathbb{R}$ ponto a ponto. Uma consequência útil: se P é um polinômio com coeficientes reais, então $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$, e portanto *as raízes não reais de um polinômio real vêm sempre em pares conjugados.*

3 Módulo e divisão

Definição 3.1. O *módulo* de $z = a + bi$ é o número real não negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pela Proposição 2.2(e), a definição pode ser escrita sem coordenadas:

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Essa é a fórmula que se deve usar nas demonstrações — ela transforma afirmações sobre módulos em contas com produtos e conjugados.

Proposição 3.2. *Para todos* $z, w \in \mathbb{C}$*:*

(a) $|z| \geq 0$*, e* $|z| = 0$ *se, e somente se,* $z = 0$*;*

(b) $|\bar{z}| = |z|$ *e* $|-z| = |z|$*;*

(c) $|zw| = |z|\,|w|$*;*

(d) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *e* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$*;*

(e) se z *é real,* $|z|$ *coincide com o valor absoluto usual.*

Demonstração. Provemos (c), que é a única não imediata:

$$|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2,$$

e como módulos são não negativos, $|zw| = |z||w|$. Os demais itens seguem diretamente da definição. □

A identidade $z\bar{z} = |z|^2$ resolve também o problema da *divisão*: para $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \qquad \text{e portanto} \qquad \frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}.$$

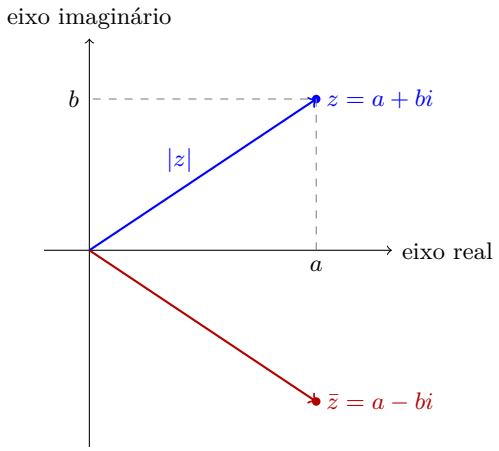
Na prática: *multiplique numerador e denominador pelo conjugado do denominador.*

Exemplo 3.3.

$$\frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i+6i+2i^2}{9+1} = \frac{1+7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

4 O plano de Argand–Gauss

Como os números complexos são pares ordenados de reais, é natural representá-los como pontos do plano: ao número $z = a + bi$ associamos o ponto de coordenadas (a, b), chamado o *afixo* de z. O eixo horizontal, formado pelos afixos dos números reais, é o *eixo real*; o vertical é o *eixo imaginário*.



Nessa representação:

- a *soma* é a soma de vetores pela regra do paralelogramo, já que ela é feita coordenada a coordenada;
- $|z|$ é a *distância de z à origem*, pelo teorema de Pitágoras; mais geralmente, $|z - w|$ é a distância entre os afixos de z e w;
- a conjugação é a *reflexão* em torno do eixo real.

Proposição 4.1 (desigualdade triangular)**.** *Para todos $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \qquad \textit{e ainda} \qquad ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Demonstração. Usando $|u|^2 = u\bar{u}$ e a Proposição 2.2(c),

$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Pela Proposição 3.2(d) e (c), $\mathrm{Re}(z\bar{w}) \le |z\bar{w}| = |z||w|$, logo

$$|z+w|^2 \le |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = \big(|z|+|w|\big)^2,$$

e extraindo raízes (ambos os lados são não negativos) obtemos a primeira desigualdade. Para a segunda, escreva $z = (z-w)+w$ e aplique a primeira: $|z| \le |z-w| + |w|$, isto é, $|z| - |w| \le |z-w|$; trocando os papéis de z e w obtemos $|w| - |z| \le |z-w|$. □

Exemplo 4.2 (lugares geométricos)**.** A leitura métrica do módulo traduz equações em figuras:

- $|z - z_0| = r$ é a circunferência de centro z_0 e raio r;
- $|z - z_0| < r$ é o disco aberto correspondente;
- $|z - z_1| = |z - z_2|$ é a mediatriz do segmento que liga z_1 a z_2.

5 Forma polar

Um ponto do plano pode ser localizado por suas coordenadas cartesianas ou por sua distância à origem e pelo ângulo que faz com o eixo real. A segunda descrição é a que revela o significado da multiplicação.

Definição 5.1. Seja $z \neq 0$ e $\rho = |z|$. Um *argumento* de $z = a + bi$ é um número real θ tal que

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}.$$

Escrevemos então

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta),$$

a *forma polar* (ou trigonométrica) de z.

O argumento não é único: se θ é um argumento de z, então $\theta + 2k\pi$ também o é, para todo $k \in \mathbb{Z}$ — e esses são todos. O argumento pertencente a $(-\pi, \pi]$ é chamado *argumento principal*. O número 0 não tem argumento definido. Duas consequências práticas: dois complexos não nulos são iguais se, e somente se, têm o mesmo módulo e argumentos que diferem por um múltiplo inteiro de 2π.

Exemplo 5.2. Para $z = 1 + i$: $\rho = \sqrt{2}$ e $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donde $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$.

Para $z = -1 + \sqrt{3}\,i$: $\rho = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donde $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Na direção contrária: $4\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$.

Observação 5.3 (uma notação). Escrever $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ a toda hora é cansativo, e por isso abreviamos

$$\operatorname{cis}\theta := \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta,$$

de modo que a forma polar fica $z = \rho \operatorname{cis}\theta$. Por ora isso é pura notação — um nome curto para o número complexo de módulo 1 e argumento θ —, e usaremos indiferentemente as duas escritas. A Proposição 5.4 abaixo mostrará, no entanto, que cis satisfaz $\operatorname{cis}\theta \cdot \operatorname{cis}\varphi = \operatorname{cis}(\theta+\varphi)$, isto é, que ela transforma somas em produtos — exatamente o que faz uma exponencial. No Capítulo 3, quando definirmos a exponencial de um número complexo, veremos que isso não é coincidência.

Proposição 5.4 (produto e quociente na forma polar)**.** *Sejam $z = \rho\operatorname{cis}\theta$ e $w = \sigma\operatorname{cis}\varphi$. Então*

$$zw = \rho\sigma\ \operatorname{cis}(\theta+\varphi), \qquad \frac{z}{w} = \frac{\rho}{\sigma}\ \operatorname{cis}(\theta-\varphi) \quad (w \neq 0).$$

Em palavras: ao multiplicar, os módulos se multiplicam e os argumentos se somam.

Demonstração. Multiplicando e agrupando,

$$zw = \rho\sigma\big[(\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi) + i(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\big],$$

e as duas expressões entre parênteses são exatamente $\cos(\theta+\varphi)$ e $\operatorname{sen}(\theta+\varphi)$, pelas fórmulas de adição. O quociente segue observando que $\frac{1}{w} = \frac{1}{\sigma}\operatorname{cis}(-\varphi)$. □

Observação 5.5 (o significado geométrico da multiplicação). Fixado $z = \rho\operatorname{cis}\theta$, a aplicação $w \mapsto zw$ é a composição de uma *rotação* de ângulo θ em torno da origem com uma *homotetia* de razão ρ. Em particular:

- multiplicar por i (módulo 1, argumento $\frac{\pi}{2}$) é girar 90° no sentido anti-horário — e girar duas vezes 90° é o mesmo que multiplicar por -1, o que explica geometricamente a identidade $i^2 = -1$;
- multiplicar por um número real positivo é apenas dilatar ou contrair.

Foi para que a multiplicação tivesse esse significado que valeu a pena definir o produto de pares da maneira aparentemente estranha da aula passada.

6 A fórmula de De Moivre

Teorema 6.1 (primeira fórmula de De Moivre)**.** *Se $z = \rho\operatorname{cis}\theta$ e $n \in \mathbb{Z}$, então*

$$z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) = \rho^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta).$$

Demonstração. Para $n \geq 0$, indução: o caso $n = 0$ é trivial, e o passo de indução é a Proposição 5.4 aplicada a z^n e z. Para $n < 0$, use que $z^{-1} = \rho^{-1}\operatorname{cis}(-\theta)$ e aplique o caso positivo. □

Exemplo 6.2. $(1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100}\left(\cos\frac{100\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{100\pi}{4}\right) = 2^{50}(\cos 25\pi + i\operatorname{sen}25\pi) = -2^{50}$.

Exemplo 6.3 (identidades trigonométricas de graça)**.** Tomando $\rho = 1$ e $n = 3$ e expandindo o lado esquerdo pelo binômio,

$$\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta - i\operatorname{sen}^3\theta.$$

Igualando partes reais e partes imaginárias:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta, \qquad \operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.$$

7 Raízes n-ésimas

Teorema 7.1 (segunda fórmula de De Moivre)**.** *Sejam $n \geq 1$ inteiro e $z = \rho \operatorname{cis}\theta$ um número complexo não nulo. Então z tem exatamente n raízes n-ésimas em $\mathbb{C}$, a saber*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis}\frac{\theta + 2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Demonstração. Que cada z_k é raiz n-ésima de z segue da Teorema 6.1: elevando à n, o módulo volta a ser ρ e o argumento vira $\theta + 2k\pi$, que representa o mesmo ponto que θ. Reciprocamente, se $w = \sigma \operatorname{cis}\varphi$ satisfaz $w^n = z$, então $\sigma^n = \rho$ e $n\varphi = \theta + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$; logo $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$ (raiz real positiva) e $\varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$. Por fim, os valores $k = 0, 1, \ldots, n-1$ dão argumentos distintos módulo 2π, e qualquer outro k repete um deles, pois k e $k+n$ produzem argumentos que diferem por 2π. □

Observação 7.2 (leitura geométrica). As n raízes têm todas o mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ e argumentos igualmente espaçados de $\frac{2\pi}{n}$: elas são os vértices de um *polígono regular de n lados* inscrito na circunferência de centro 0 e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

Exemplo 7.3. Resolvamos $z^4 = -4$. Como $-4 = 4(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$, as raízes têm módulo $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ e argumentos $\frac{\pi+2k\pi}{4}$, isto é, $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$:

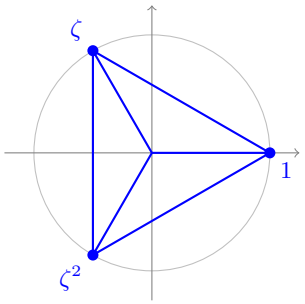
$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i,$$

os vértices de um quadrado.

Definição 7.4. As *raízes n-ésimas da unidade* são as raízes n-ésimas de $z = 1$, ou seja,

$$U_n = \left\{\zeta^k : \ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}, \qquad \zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}.$$

Exemplo 7.5. Para $n = 3$: $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, e $U_3 = \left\{1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$, os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário.



Note que, se $\rho = 1$ e w_0 é uma raiz n-ésima qualquer de z, então todas as outras são $w_0\zeta^k$: *as raízes de um número são obtidas de uma delas girando por múltiplos de* $\frac{2\pi}{n}$. As raízes da unidade são, por isso, a peça central de qualquer problema envolvendo raízes.

Proposição 7.6. *Para $n \geq 2$, a soma das n raízes n-ésimas da unidade é zero:*

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

Demonstração. Como $\zeta \neq 1$ e $\zeta^n = 1$, a soma da progressão geométrica dá $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \frac{\zeta^n - 1}{\zeta - 1} = 0$. □

Geometricamente: o baricentro dos vértices de um polígono regular inscrito no círculo unitário é o centro do círculo. Esse cancelamento perfeito é mais poderoso do que parece — ele é o motor da aplicação discutida na segunda metade da aula, desenvolvida no material extra que acompanha estas notas.

8 O que vem a seguir

Com módulo, conjugado e forma polar, encerramos o Capítulo 1 do livro-texto. A partir da próxima aula mudamos de assunto: passamos a olhar $\mathbb{C}$ como um espaço onde se faz *cálculo* — domínios, limites, continuidade e diferenciabilidade (Capítulo 2) — para então chegar ao objeto central do curso, as funções holomorfas.