Polinômios e a origem dos números complexos

Aviso. Estas notas foram geradas por inteligência artificial a partir do conteúdo apresentado em sala e da bibliografia do curso. Podem conter erros ou imprecisões; em caso de dúvida, consulte o livro-texto indicado no plano de ensino.

Nesta primeira aula não definimos ainda os números complexos. O objetivo é outro: entender *por que* alguém precisou inventá-los. A resposta não é "para resolver $x^2+1=0$" — essa equação simplesmente não tem solução real, e nada obriga a inventar uma. O verdadeiro empurrão veio das equações de *terceiro* grau, onde os números imaginários aparecem no meio do caminho de contas cujo começo e cujo fim são inteiramente reais. Para chegar lá, revisamos antes o que é um polinômio, como se divide um polinômio por outro e como se resolvem as equações de segundo grau.

1 Polinômios

Definição 1.1. Um *polinômio* com coeficientes reais é uma expressão da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que P tem *grau* n e escrevemos $\operatorname{gr} P = n$; o número a_n é o *coeficiente líder*. O polinômio nulo não tem grau definido.

Polinômios se somam e se multiplicam pelas regras usuais da álgebra, e o grau se comporta bem em relação ao produto:

$$\operatorname{gr}(PQ) = \operatorname{gr} P + \operatorname{gr} Q.$$

Isso vale porque o coeficiente líder de PQ é o produto dos coeficientes líderes de P e de Q, e o produto de dois números reais não nulos é não nulo — um fato sobre $\mathbb{R}$ que voltará a ser importante na próxima aula.

Definição 1.2. Um número $r \in \mathbb{R}$ é uma *raiz* de P quando $P(r) = 0$.

A pergunta que organiza toda a aula é: *dado um polinômio, como encontrar suas raízes?* Para grau 1 a resposta é imediata: $ax + b = 0$ dá $x = -b/a$. Vamos subindo.

2 Divisão de polinômios e o dispositivo de Briot–Ruffini

Teorema 2.1 (divisão euclidiana)**.** *Sejam P e D polinômios, com $D \neq 0$. Então existem polinômios únicos Q (*quociente*) e R (*resto*) tais que*

$$P = DQ + R, \qquad \text{com } R = 0 \text{ ou } \operatorname{gr} R < \operatorname{gr} D.$$

O caso que mais nos interessa é $D(x) = x - r$, um polinômio de grau 1: aí o resto é uma constante.

Teorema 2.2 (teorema do resto)**.** *O resto da divisão de $P(x)$ por $x - r$ é o número $P(r)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1, $P(x) = (x - r)Q(x) + R$ com R constante. Avaliando os dois lados em $x = r$, obtemos $P(r) = 0 \cdot Q(r) + R = R$. □

Corolário 2.3 (teorema de D'Alembert)**.** *r é raiz de P se, e somente se, $x - r$ divide $P(x)$.*

Corolário 2.4. *Um polinômio não nulo de grau n tem no máximo n raízes.*

Demonstração. Indução em n. Se $n = 0$, P é uma constante não nula e não tem raiz. Se P tem grau $n \geq 1$ e alguma raiz r, então $P(x) = (x - r)Q(x)$ com $\operatorname{gr} Q = n - 1$; toda raiz de P diferente de r é raiz de Q (pois um produto de reais só é zero se um dos fatores for zero), e por hipótese de indução Q tem no máximo $n - 1$ raízes. □

O dispositivo de Briot–Ruffini

Dividir por $x - r$ é tão frequente que vale a pena ter um algoritmo enxuto para isso. Escrevendo

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \qquad \text{e} \qquad Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0,$$

e comparando os coeficientes dos dois lados de $P(x) = (x - r)Q(x) + R$, obtemos a recorrência

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = a_k + r\,b_k \quad (k = n-1, \ldots, 1), \qquad R = a_0 + r\,b_0.$$

Em palavras: *desça o primeiro coeficiente; depois, repetidamente, multiplique por r e some ao próximo coeficiente.* Na prática, organiza-se assim:

Exemplo 2.5. Dividindo $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ por $x - 2$:

	2	−3	4	−5
2	2	1	6	7

Logo $Q(x) = 2x^2 + x + 6$ e $R = 7$, isto é, $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = (x - 2)(2x^2 + x + 6) + 7$. Em particular $P(2) = 7$, de acordo com o Teorema 2.2.

Exemplo 2.6. Dividindo $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $x - 1$:

	1	−6	11	−6
1	1	−5	6	0

O resto é zero, ou seja, 1 é raiz, e $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. As raízes são $1, 2, 3$.

O Exemplo 2.6 ilustra a estratégia geral: *cada raiz encontrada abaixa o grau em uma unidade.* Se soubermos resolver o grau 2, basta encontrar *uma* raiz de uma cúbica para terminar o serviço.

3 Polinômios de grau 2: a fórmula de Bhaskara

Comecemos observando que, para polinômios de grau 2, encontrar uma raiz já entrega a outra.

Proposição 3.1. *Seja $P(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Se $r \in \mathbb{R}$ é raiz de P, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que*

$$P(x) = a(x - r)(x - s), \qquad \text{a saber} \qquad s = -\frac{b}{a} - r.$$

Demonstração. Expandindo,

$$a(x - r)(x - s) = a\big(x^2 - (r + s)x + rs\big) = ax^2 - a(r + s)x + ars.$$

Para que isso seja igual a $ax^2 + bx + c$ precisamos de $-a(r + s) = b$ e $ars = c$. A primeira condição diz exatamente que $s = -\frac{b}{a} - r$. Com essa escolha, e usando que $ar^2 + br + c = 0$,

$$ars = ar\left(-\frac{b}{a} - r\right) = -rb - r^2a = -(ar^2 + br) = c,$$

que é a segunda condição. □

Ou seja: *se P tem uma raiz real, então tem duas* (eventualmente iguais). Falta descobrir quando existe alguma. A conta fica mais limpa se dividirmos P por a, o que não altera as raízes; suponhamos então $a = 1$, isto é,

$$P(x) = x^2 + bx + c = (x - r)(x - s), \qquad \text{donde} \qquad r + s = -b, \quad rs = c.$$

Conhecemos a *soma* das raízes, mas não a diferença. Então batizemos a diferença: como $r+s = -b$, os dois números estão simetricamente distribuídos em torno de $-b/2$, e podemos escrever

$$r = -\frac{b}{2} + d, \qquad s = -\frac{b}{2} - d,$$

onde $d = r + \frac{b}{2}$ é a incógnita nova. (Repare que essa mudança de variável não custa nada: ela só usa que já sabemos a soma.) Agora a condição $rs = c$ vira

$$\left(-\frac{b}{2} + d\right)\left(-\frac{b}{2} - d\right) = \frac{b^2}{4} - d^2 = c, \qquad \text{ou seja} \qquad d^2 = \frac{b^2}{4} - c = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

E aqui está o ponto de virada: *um quadrado nunca é negativo.* Se $b^2 - 4c \geq 0$, podemos tomar $d = \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$ e obtemos

$$r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \qquad s = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Se $b^2 - 4c < 0$, nenhum d real satisfaz a equação, e portanto P não tem raiz real. Refazendo a conta com a geral, chegamos à forma familiar.

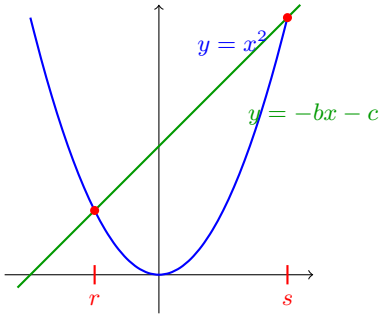
Teorema 3.2 (fórmula de Bhaskara)**.** *Seja $P(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ e seja*

$\Delta = b^2 - 4ac$. *Se* $\Delta \geq 0$, *as raízes de* P *são*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

e se $\Delta < 0$ *o polinômio* P *não tem raiz real.*

Observação 3.3 (leitura geométrica). A equação $x^2 + bx + c = 0$ pode ser reescrita como $x^2 = -bx - c$: as raízes são as abscissas dos pontos onde a parábola $y = x^2$ encontra a reta $y = -bx - c$. Uma parábola e uma reta se cortam em dois pontos, em um só (tangência) ou em nenhum — exatamente os três casos $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.



O primeiro convite (recusado)

O exemplo mais simples de discriminante negativo é

$$P(x) = x^2 + 1,$$

que não tem raiz real: para todo $x \in \mathbb{R}$ vale $x^2 \geq 0$ e portanto $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

E se *imaginássemos* que existe um objeto i com $i^2 = -1$? Duas observações se impõem de saída:

- i não é um número real, pelo argumento acima;
- o que queremos, então, é um *corpo que estenda* $\mathbb{R}$ *e contenha* i — um conjunto de números onde as regras usuais da álgebra continuem valendo e onde -1 tenha raiz quadrada.

Note, porém, que até aqui não há nenhuma *necessidade* de fazer isso. Dizer que $x^2 + 1 = 0$ não tem solução é uma resposta perfeitamente satisfatória, do mesmo modo que "não existe triângulo retângulo de perímetro 12 e área 7" é uma resposta satisfatória. O convite só se torna irrecusável no grau 3.

4 Polinômios de grau 3: a fórmula de Cardano

Toda equação cúbica pode ser posta numa forma reduzida. De fato, na equação $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, a substituição $x = y - \frac{a_2}{3}$ elimina o termo de grau 2 (expanda e confira o

coeficiente de y^2). Basta então tratar as equações do tipo

$$x^3 = px + q.$$

Teorema 4.1 (fórmula de Cardano, 1545)**.** *Uma solução de $x^3 = px + q$ é dada por*

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Demonstração. A ideia é procurar a solução *quebrada em duas parcelas*: escreva $x = u + v$. Então

$$x^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 3uv\,x + (u^3 + v^3).$$

Portanto, se conseguirmos escolher u e v com

$$3uv = p \qquad \text{e} \qquad u^3 + v^3 = q,$$

o número $x = u + v$ resolve a equação. Ora, a primeira condição diz que $u^3 v^3 = \frac{p^3}{27}$; conhecemos então a soma e o produto dos números u^3 e v^3, e pela Proposição 3.1 eles são as raízes da equação *de segundo grau*

$$t^2 - qt + \frac{p^3}{27} = 0.$$

Por Bhaskara, $t = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$. Extraindo as raízes cúbicas e somando, obtemos a fórmula do enunciado. □

Vale destacar o mecanismo: *a cúbica foi resolvida reduzindo-a a uma quadrática.* É por isso que a fórmula tem esse aspecto de raiz cúbica de raiz quadrada.

Exemplo 4.2. Para $x^3 = -6x + 20$ temos $p = -6$ e $q = 20$, logo

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 100 - \frac{-216}{27} = 100 + 8 = 108, \qquad \sqrt{108} = 6\sqrt{3},$$

e a fórmula dá

$$x = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}.$$

À primeira vista isso é um número horroroso. Mas $(1+\sqrt{3})^3 = 1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3} = 10+6\sqrt{3}$ e, do mesmo modo, $(1-\sqrt{3})^3 = 10 - 6\sqrt{3}$. Logo

$$x = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3}) = 2,$$

e de fato $2^3 = 8 = -6 \cdot 2 + 20$. A fórmula funciona; ela apenas não se dá ao trabalho de simplificar o resultado.

5 O caso irredutível e o cálculo de Bombelli

Apliquemos agora a fórmula à equação

$$x^3 = 15x + 4.$$

Aqui $p = 15$ e $q = 4$, de modo que

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 4 - \frac{3375}{27} = 4 - 125 = -121 < 0,$$

e a fórmula de Cardano produz

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

O que aconteceu? Um radicando negativo, como no caso $\Delta < 0$ das quadráticas. Só que agora a situação é completamente diferente, e é isso que muda a história:

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1),$$

de modo que a equação tem *três* raízes reais, a saber 4 e $-2 \pm \sqrt{3}$. Não há nada de imaginário no problema nem na resposta — e ainda assim a única fórmula disponível insiste em passar por $\sqrt{-121}$. Este é o chamado *caso irredutível* das cúbicas.

Bombelli (1572) resolveu levar a conta a sério. Escreva $\alpha = \sqrt{-121}$, isto é, trate α como um símbolo que obedece às regras usuais da álgebra e satisfaz $\alpha^2 = -121$. A aposta é que $\sqrt[3]{2 + \alpha}$ seja um número da forma $2 + \frac{\alpha}{11}$. Vamos conferir, lembrando que $\left(\frac{\alpha}{11}\right)^2 = \frac{-121}{121} = -1$ e portanto $\left(\frac{\alpha}{11}\right)^3 = -\frac{\alpha}{11}$:

$$\left(2 + \frac{\alpha}{11}\right)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{\alpha}{11} + 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{11}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{11}\right)^3 = 8 + \frac{12\alpha}{11} - 6 - \frac{\alpha}{11} = 2 + \alpha.$$

Exatamente o que queríamos. Trocando α por $-\alpha$, obtemos também $\left(2 - \frac{\alpha}{11}\right)^3 = 2 - \alpha$, e portanto

$$x = \left(2 + \frac{\alpha}{11}\right) + \left(2 - \frac{\alpha}{11}\right) = 4.$$

As parcelas imaginárias se cancelaram e sobrou a raiz real 4, que já sabíamos ser solução. Note ainda que $\frac{\alpha}{11} = \frac{\sqrt{-121}}{11} = \sqrt{-1}$: escrevendo i no lugar desse símbolo, o cálculo acima é simplesmente

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i, \qquad (2 - i)^3 = 2 - 11i, \qquad x = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

Observação 5.1 (a moral da aula). Nas quadráticas, os números imaginários apareciam apenas para dizer "não há solução": podíamos ignorá-los sem prejuízo. Nas cúbicas, eles aparecem *no meio* de uma conta que começa com números reais e termina com números reais. Não são o destino; são a estrada. É esse fenômeno — e não a equação $x^2 + 1 = 0$ — que torna inevitável perguntar o que são, afinal, esses objetos.

6 Dois problemas clássicos

Fechamos com dois problemas antigos em que o mesmo símbolo aparece, dessa vez em equações de segundo grau.

Exemplo 6.1 (Cardano, 1545)**.** *Dividir* 10 *em duas partes cujo produto seja* 40. Se uma das partes é x, a outra é $10-x$ e a condição é $x(10-x)=40$, ou seja, $x^2-10x+40=0$. O discriminante é $\Delta = 100-160=-60$, e a fórmula de Bhaskara devolve

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Cardano observou que, *aceitando* manipular esses símbolos pelas regras usuais, as duas partes de fato funcionam:

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15}) = 10, \qquad (5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40.$$

Ele chamou isso de "tão sutil quanto inútil".

Exemplo 6.2 (Diofanto)**.** *Existe um triângulo retângulo de perímetro* 12 *e área* 7*?* Sejam a e b os catetos e c a hipotenusa. Das condições $a+b+c=12$ e $\frac{ab}{2}=7$ obtemos $ab=14$ e $c=12-a-b$; substituindo em $a^2+b^2=c^2$,

$$a^2+b^2=(12-a-b)^2=144-24(a+b)+a^2+2ab+b^2 \implies 24(a+b)=144+2ab=172,$$

isto é, $a+b=\frac{43}{6}$. Como $ab=14$, os catetos são as raízes de $t^2-\frac{43}{6}t+14=0$, ou seja, de

$$6t^2-43t+84=0,$$

cujo discriminante é $\Delta = 1849-2016=-167<0$. A resposta ao problema é "não existe tal triângulo" — e o discriminante negativo é precisamente o registro algébrico dessa impossibilidade geométrica.

7 O que vem a seguir

Na próxima aula vamos parar de manipular $\sqrt{-1}$ como um símbolo de fé e construir, com todo o rigor, um corpo que estende $\mathbb{R}$ e no qual -1 tem raiz quadrada. Antes disso, porém, precisamos ser precisos sobre o que é $\mathbb{R}$: quais propriedades usamos o tempo todo nesta aula (e em particular *qual* delas impede que -1 seja um quadrado). O horizonte distante é o Teorema Fundamental da Álgebra: em $\mathbb{C}$, todo polinômio não constante tem raiz — e portanto o processo de abaixar o grau iniciado aqui nunca mais trava.