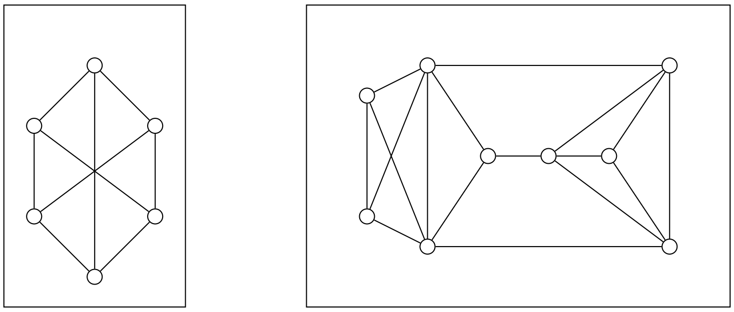
`Não precisa entregar para a monitora as soluções dos problemas.`

Problema 1. Calcule $\Delta(G)$, $\alpha(G)$, $\omega(G)$, e $\chi(G)$ para da um dos grafos abaixo.



Problema 2. O hipercubo de dimensão n é o grafo Q_n que tem como conjunto de vértices $V(Q_n) = \{0,1\}^n$ o conjunto de vetores com n coordenadas de 0's e 1's e conjunto de arestas $E(Q_n)$ consistindo dos pares de vértices u e v que diferem em somente uma coordenada.

(a) Mostre que Q_n é um grafo n-regular e que $e(Q_n) = n2^{n-1}$.

(b) Mostre que Q_n não contém triângulos e determine $\omega(Q_n)$.

(c) Mostre que todo ciclo contido em Q_n tem comprimento par e determine $\chi(Q_n)$.

(d) Mostre que $\alpha(Q_n) = 2^{n-1}$.

(e) Mostre que Q_n é hamiltoniano, i.e., contém um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

Problema 3. Seja G um grafo acíclico. Mostre que $\omega(G) \leq 2$ e que $\chi(G) \leq 2$.

Problema 4. Mostre que se G é um grafo conexo com n vértices e m arestas, então G contém pelo menos $m - n + 1$ ciclos distintos.

Problema 5. Mostre que se G é um grafo com pelo menos 6 vértices, então $\omega(G) \geq 3$ ou $\alpha(G) \geq 3$.

Problema 6. Mostre que se G é um grafo com pelo menos 9 vértices, então $\omega(G) \geq 3$ ou $\alpha(G) \geq 4$.

Problema 7. Mostre que se G é um grafo com pelo menos 18 vértices, então $\omega(G) \geq 4$ ou $\alpha(G) \geq 4$.

Problema 8. Dado um grafo G, o grafo complementar $\overline{G}$ é o grafo com o mesmo conjunto de vértices de G e em que dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se, e somente se, não são adjacentes em G. Mostre que se um grafo G não é conexo, então $\overline{G}$ é conexo.

Problema 9. Mostre que para todo grafo G com n vértices, temos que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

Problema 10. Sejam n e k inteiros com $1 \leq k < n$. Forme um grafo G cujos vértices sejam os inteiros $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Temos uma aresta unindo os vértices a e b desde que

$$a - b \equiv \pm k \pmod{n}.$$

Por exemplo, se $n = 20$ e $k = 6$, então o vértice 2 seria adjacente aos vértices 8 e 16.

(a) Determine as condições necessárias e suficientes sobre n e k para que G seja conexo.

(b) Determine uma fórmula envolvendo n e k para o número de componentes conexas de G.

Problema 11. Mostre que se G é um grafo planar, então $\delta(G) \leq 5$ (dica: use o fato de que um grafo planar com $n \geq 3$ vértices tem no máximo $3n - 6$ arestas).

Problema 12. Mostre que se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 6$.

Problema 13. Mostre que se G é um grafo planar sem triângulos, então $\chi(G) \leq 4$.

Problema 14. Seja G um grafo planar com n vértices em que cada ciclo tem comprimento no mínimo 8. Mostre que $e(G) \leq \dfrac{4(n-2)}{3}$. Ademais, use este fato para mostrar que $\chi(G) \leq 3$.