`Entregar para a monitora as soluções de 5 problemas a sua escolha.`

Problema 1. Prove cada uma das seguintes afirmações por contradição.

(a) Para todo inteiro n, temos que $n^2 - 2$ não é múltiplo de 4.

(b) Se a e b são números reais positivos, então $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(c) Se a, b e c são números primos, então $a^2 + b^2 \neq c^2$.

(d) Se n é um inteiro tal que $3|n^2$, então $3|n$.

Problema 2. Mostre que $\sqrt{3}$ é um número irracional.

Problema 3. Prove as seguintes afirmações usando o Princípio da Boa Ordenação.

(a) Para todo inteiro positivo n, temos que $n! \leq n^n$.

(b) Para todo inteiro positivo n, temos que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.

(c) Para todo inteiro positivo n, temos que $4|(5^n - 1)$.

(d) Para todo inteiro positivo n, temos que $3|(n^3 - 7n + 3)$.

Problema 4. Demonstre cada uma das seguintes identidades usando o Princípio da Indução.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}$.

(d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$

Problema 5. Prove as seguintes identidades.

(a) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right) = \frac{n+1}{2}$, para todo inteiro $n \geq 2$.

(b) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n}$, para todo inteiro $n \geq 2$.

(c) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$, para todo inteiro $n \geq 2$.

(d) $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{2i+2}\right) = \frac{1}{(2n+2)!}$, para todo inteiro não-negativo n.

Problema 6. Resolva cada uma das seguintes relações de recorrência fornecendo uma fórmula explícita para a_n.

(a) $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1}$,
$a_0 = 4$.

(b) $a_n = -a_{n-1}$,
$a_0 = 5$.

(c) $a_n = 3a_{n-1} - 1$,
$a_0 = 10$.

(d) $a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2}$,
$a_0 = 1, a_1 = 4$.

(e) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$,
$a_0 = 4, a_1 = 4$.

(f) $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$,
$a_0 = 1, a_1 = 2$.

(g) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$,
$a_0 = 3, a_1 = 6$.

(h) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$,
$a_0 = 5, a_1 = 1$.

Problema 7. Defina uma função bijetiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ (mostre que tal função é de fato bijetiva).

Problema 8. Em uma festa, cada par de pessoas são mutualmente conhecidas uma da outra ou são mutualmente desconhecidas entre si.

(a) Mostre que em toda festa com 6 pessoas, existe um grupo de 3 pessoas que se conhecem ou um grupo de 3 pessoas que não se conhecem.

(b) Esboce um exemplo de uma festa com 5 pessoas na qual não existe um grupo de 3 pessoas que se conhecem nem um grupo de 3 pessoas que não se conhecem.

(c) Mostre que em toda festa com 9 pessoas, existe um grupo de 4 pessoas que se conhecem ou um grupo de 3 pessoas que não se conhecem.

(d) Esboce um exemplo de uma festa com 8 pessoas na qual não existe um grupo de 4 pessoas que se conhecem nem um grupo de 3 pessoas que não se conhecem.

(e) Mostre que em toda festa com 18 pessoas, existe um grupo de 4 pessoas que se conhecem ou um grupo de 4 pessoas que não se conhecem.