Prof. Walner Mendonça

1 Fluxos em redes

Uma *rede* N é uma quadrupla (G, s, t, c) consistindo de um *grafo direcionado* G, dois vértices especiais s e t, e uma função $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ que associa a cada aresta, um número real não-negativo. Dizemos que os vértices s e t são a *fonte* e o *sumidouro* da rede[1], respectivamente. E para cada aresta $e \in E(G)$, dizemos que $c(e)$ é a *capacidade* de e.

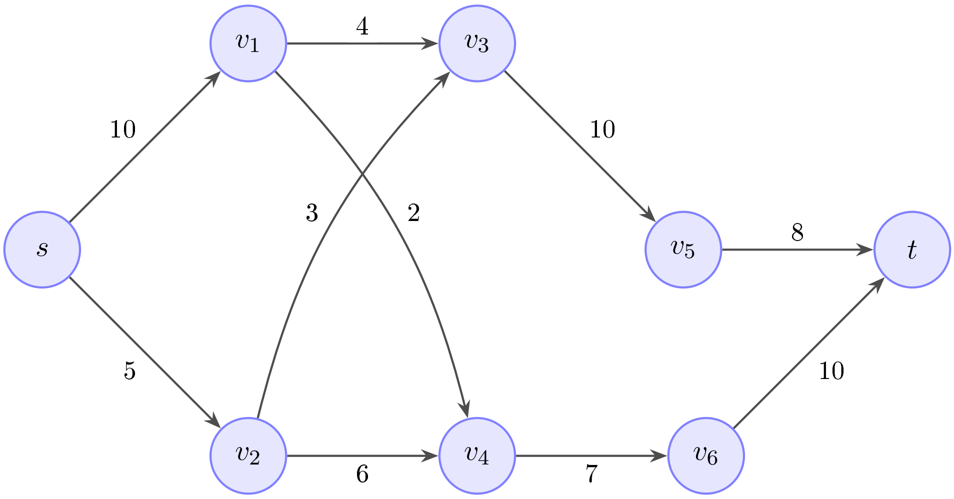

Figura 1: Um exemplo de uma rede.

Dada uma aresta direcionada $e = (x, y) \in E(G)$, dizemos que x é o *início* de e e denotamos $x = \mathrm{i}(e)$, enquanto que dizemos que y é o *término* de e e denotamos $y = \mathrm{t}(e)$. Dado um conjunto $U \subseteq V(G)$, denotamos por $\overleftarrow{\partial} U$ o conjunto das arestas *saindo* de U, isto é,

$$\overleftarrow{\partial} U = \{e \in E(G) : \mathrm{i}(e) \in U,\ \mathrm{t}(e) \notin U\}.$$

Similarmente, denotamos por $\overrightarrow{\partial} U$ o conjunto das arestas *entrando* em U, isto é,

$$\overrightarrow{\partial} U = \{e \in E(G) : \mathrm{t}(e) \in U,\ \mathrm{i}(e) \notin U\}.$$

No caso em que U contém apenas um vértice, digamos $U = \{u\}$, simplificamos a notação para $\overleftarrow{\partial} u$ e $\overrightarrow{\partial} u$, ao invés de $\overleftarrow{\partial} U$ e $\overrightarrow{\partial} U$.

Uma função $f : E(G) \to \mathbb{R}$ é um *fluxo* na rede N se satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \le f(e) \le c(e)$, para todo $e \in E(G)$;
2. $\displaystyle\sum_{e \in \overleftarrow{\partial} v} f(e) = \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} v} f(e)$, para todo $v \in V(G) \setminus \{s, t\}$

[1] Em inglês, fonte e sumidouro são comumente chamados de *source* e *target*; daí a escolha das letras s e t para tais vértices.

A primeira propriedade, a qual chamamos de *viabilidade do fluxo*, nos diz que, para cada aresta do grafo direcionado, não temos fluxo negativo nem fluxo que exceda a capacidade da aresta. Já a segunda propriedade, a qual nos referimos como a *conservação do fluxo*, nos diz que a quantidade de fluxo que entra em um vértice é igual a quantidade de fluxo que sai, desde que esse vértice não seja nem a fonte nem o sumidouro.

O *valor* de um fluxo f é definido como

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} s} f(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} s} f(e).$$

Isto é, $\mathrm{val}(f)$ contabiliza a quantidade de fluxo que sai da fonte menos a quantidade de fluxo que volta pra fonte. O seguinte resultado, que segue da conservação do fluxo, nos dá uma outra forma de calcular o valor de um fluxo: basta medir a quantidade de fluxo que sai e subtrair a quantidade de fluxo que entra em um conjunto U que contenha a fonte, mas que não contenha o sumidouro.

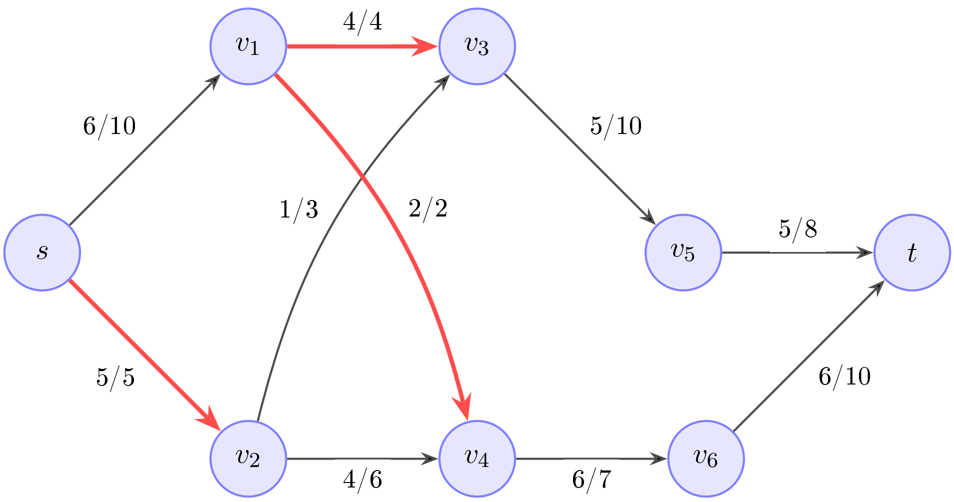

Figura 2: Um exemplo de um fluxo de valor 11 e um corte com o mesmo valor. Note que tal corte corresponde ao conjunto $\overleftarrow{\partial} U$, onde $U = \{s, v_1\}$.

Proposição 1. *Seja f um fluxo em uma rede N. Para todo conjunto U de vértices contendo a fonte, mas que não contém o sumidouro, temos*

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} U} f(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} U} f(e).$$

Demonstração. Considere o seguinte somatório:

$$X = \sum_{v \in U} \left(\sum_{e \in \overleftarrow{\partial} v} f(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} v} f(e) \right).$$

Note que, pela definição de fluxo, para cada $v \in U \setminus \{s\}$, o termo dentro do parêntese no somatório acima é nulo. E para $v = s$, o termo entre parênteses é igual ao $\mathrm{val}(f)$. Portanto, o somatório acima é igual ao $\mathrm{val}(f)$.

Por outro lado, cada aresta e incidente em U contribuirá para o somatório acima. Se tal aresta tiver os seus dois vértices contidos em U, a contribuição dessa aresta será nula. Logo, sobra somente aquelas arestas que têm exatamente um vértice em U. Aquelas que têm o início em U, contribuirão com $f(e)$, enquanto que aquelas que têm o fim em U, contribuirão com $-f(e)$. A seguinte conta sumariza essas observações:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{v \in U} \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} v} f(e) - \sum_{v \in U} \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} v} f(e) \\ &= \sum_{e\,:\,\mathrm{i}(e) \in U} f(e) - \sum_{e\,:\,\mathrm{t}(e) \in U} f(e) \\ &= \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} U} f(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} U} f(e), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Um conjunto de arestas C é dito ser um *corte* em uma rede se todo caminho direcionado partindo de s e chegando em t tem uma aresta em C. O *valor* de um corte C é definido como

$$\mathrm{val}(C) = \sum_{e \in C} c(e).$$

Note que se U é um conjunto de vértices que contém s, mas que não contém t, então $C = \overleftarrow{\partial} U$ é um corte (prove!). É possível mostrar que todo corte *minimal* (i.e., que não possui um subconjunto que também seja um corte) é da forma $C = \overleftarrow{\partial} U$, para algum U. A prova deste fato está embutida na demonstração do seguinte resultado.

Proposição 2. *Se f é um fluxo e C é um corte em uma rede N, então*

$$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{val}(C).$$

Demonstração. Sejam f e C um fluxo e um corte quaisquer. Considere o conjunto U de vértices v da rede para os quais existe um caminho direcionado partindo de s e chegando em v que não usa arestas de C. Em particular, temos que $s \in U$ e pela definição de corte, segue que $t \notin U$.

Note que $\overleftarrow{\partial} U \subseteq C$. De fato, se $e \in \overleftarrow{\partial} U$, então $\mathrm{i}(e) \in U$ e $\mathrm{t}(e) \notin U$. Logo existe um caminho direcionado que não usa arestas de C partindo de s e chegando em $\mathrm{i}(e)$. Mas então, se tivéssemos $e \notin C$, poderíamos estender tal caminho para $\mathrm{t}(e)$ adicionando a aresta e e teríamos que $\mathrm{t}(t) \in U$, que é uma contradição. Portanto $e \in C$.

Por fim, aplicando a Proposição 1 à U, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(f) &= \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} U} f(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} U} f(e) \leq \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} U} f(e) \\ &\leq \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} U} c(e) \leq \sum_{e \in C} c(e) = \mathrm{val}(C). \end{aligned}$$

□

Uma vez que o valor de um fluxo é limitado pelo valor de qualquer corte, a Proposição 2 nos dá uma forma de certificar que um fluxo possui o valor máximo dentre todos os fluxos possíveis numa rede dada: *basta* exibir um corte que tenha o mesmo valor que o fluxo. A grande pergunta é se tal corte deve existir ou não. O Teorem do fluxo máximo e corte mínimo responde esta pergunta afirmativamente.

Teorema 3 (Fluxo Máximo, Corte Mínimo)**.** *Em uma rede N qualquer, o valor de um fluxo máximo é igual ao valor de um corte mínimo.*

Em outras palavras,

$$\max_{\text{fluxo } f} \mathrm{val}(f) = \min_{\text{corte } C} \mathrm{val}(C).$$

Portanto, para todo fluxo máximo f, existe um corte de mesmo valor; e para todo corte mínimo C, existe um fluxo de mesmo valor. Ademais, se f é um fluxo com o mesmo valor de um corte C, então f é um fluxo máximo e C é um corte mínimo.

Provaremos uma versão mais fraca do Teorema 3, restrita às redes com capacidades inteiras. Veremos depois que esta versão mais fraca implica a versão geral por um argumento de convergência. Dizemos que um fluxo é *inteiro* se $f(e)$ for um número inteiro não-negativo, para toda aresta e da rede. Dizemos também que uma rede é *inteira* se para toda aresta e da rede, temos que $c(e)$ é um número inteiro não-negativo.

Teorema 4 (Fluxo Máximo Inteiro)**.** *Em uma rede inteira N, existe um fluxo máximo f que também é um fluxo inteiro.*

Mostraremos Teorema 4 construindo um fluxo inteiro e um corte de mesmo valor, certificando, portanto, que tal fluxo é máximo. Mais precisamente, mostraremos que dado um fluxo inteiro f, ou existe um fluxo inteiro f' com $\mathrm{val}(f') = \mathrm{val}(f) + 1$ ou existe um corte C tal que $\mathrm{val}(f) = \mathrm{val}(C)$. Iniciando com um fluxo inteiro *trivial*, no qual $f(e) = 0$, para toda aresta e, mostramos, portanto, que tal processo eventualmente gera um fluxo inteiro máximo.

Prova do Teorema 4. Seja f um fluxo qualquer (por exemplo, considere f como o fluxo inteiro trivial). Considere o seguinte procedimento que retornará um conjunto U de vértices: inicialmente, tome $U = \{s\}$. Enquanto existir uma aresta e com $e \in \overleftarrow{\partial} U$ e $f(e) < c(e)$ ou com $e \in \overrightarrow{\partial} U$ e $f(e) > 0$, adicionamos à U o vértice de e que não pertence à U. No final deste procedimento, obtemos um conjunto U no qual toda aresta $e \in \overleftarrow{\partial} U$ é tal que $f(e) = c(e)$ e toda aresta $e \in \overrightarrow{\partial} U$ é tal que $f(e) = 0$.

Em particular, se $t \notin U$, então pela Proposição 1, temos

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} U} f(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} U} f(e) = \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} U} c(e).$$

Como $\overleftarrow{\partial} U$ é um corte na rede, obtemos nesse caso um corte com o mesmo valor que o fluxo, e portanto, f é um fluxo máximo.

Podemos supor, então, que $t \in U$. Neste caso, pela construção de U, existe em U um caminho (não necessariamente direcionado) $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ no grafo subjacente à rede com $v_0 = s$ e $v_k = t$ e tal que cada $i \in [k]$, um dos dois casos ocorrem:

(a) $e = (v_{i-1}, v_i)$ é uma aresta da rede com $f(e) < c(e)$;

(b) $e = (v_i, v_{i-1})$ é uma aresta da rede com $f(e) > 0$.

Dizemos que uma aresta e como acima é *folgada*, se ela for do primeiro tipo, e é *reversa*, se ela for do segundo tipo.

Agora, definimos o seguinte fluxo inteiro $f' : E(G) \to \mathbb{Z}$:

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + 1, & \text{se } e \text{ for folgada;} \\ f(e) - 1, & \text{se } e \text{ for reversa;} \\ f(e), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostremos que f' é, de fato, um fluxo na rede em questão. De fato, como f é um fluxo, se e é uma aresta folgada, temos $f'(e) = f(e) + 1 \leq c(e)$. E se e é uma aresta reversa, temos $f'(e) = f(e) - 1 \geq 0$. Isso garante a viabilidade de f'.

A conservação de f' segue de uma análise das arestas de P. De fato, não precisamos nos preocupar com os vértices v que não estão em P, pois neste caso, as arestas incidentes em v não são afetadas e a conservação de f' seguirá diretamente da conservação de f. Portanto, resta somente verificar a conservação de f' em vértices $v = v_i$, com $i \in [k-1]$. Neste caso, temos quatro casos para considerarmos:

1. (v_{i-1}, v_i) e (v_i, v_{i+1}) são ambas arestas folgadas;
2. (v_{i-1}, v_i) é folgada e (v_{i+1}, v_i) é reversa;
3. (v_i, v_{i-1}) é reversa e (v_i, v_{i+1}) é folgada;
4. (v_i, v_{i-1}) e (v_{i+1}, v_i) são ambas reversas.

No caso 1, o fluxo entrando em v_i aumenta devido à aresta (v_{i-1}, v_i), mas o fluxo saindo de v_i também aumenta devido à aresta (v_i, v_{i+1}). No caso 2, o fluxo entrando em v_i aumenta devido à aresta (v_{i-1}, v_i), mas também diminui devido à aresta (v_{i+1}, v_i). Os demais casos são similares. Em quaisquer dos casos, teremos que

$$\sum_{e \in \overleftarrow{\partial} v} f'(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} v} f'(e) = \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} v} f(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} v} f(e) = 0,$$

o que implica na conservação de f'.

Por fim, note que

$$\mathrm{val}(f') = \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} s} f'(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} s} f'(e) = \sum_{e \in \overleftarrow{\partial} s} f(e) - \sum_{e \in \overrightarrow{\partial} s} f(e) + 1 = \mathrm{val}(f) + 1.$$

Portanto, no caso em que $t \in U$, obtemos um fluxo inteiro f' com valor maior que f.

Repetindo este argumento, eventualmente obteremos um fluxo inteiro que não poderá ser aumentado e, neste caso, U será um corte do mesmo valor que o fluxo, certificando que o fluxo é máximo. $\square$

A prova do Teorema 3 é mais cuidadosa. Primeiro, podemos provar uma versão *racional* usando o Teorema 4. Para isto, dada uma rede com capacidades racionais, criamos uma nova rede com capacidades inteiras simplesmente multiplicando todas as capacidades racionais da primeira rede pelo mínimo múltiplo comum m dos denominadores das frações. A nova rede inteira possui um fluxo máximo inteiro e um corte mínimo de mesmo valor. Obtemos um fluxo racional na rede antiga dividindo o fluxo inteiro por m. Uma vez que o corte obtido na rede inteira, quando considerado na rede antiga, terá o mesmo valor que fluxo racional obtido, concluímos que tal fluxo é máximo.

Por fim, quando as capacidades são números reais quaisquer, nós podemos criar uma rede com capacidades racionais aproximando *uniformemente* tais números reais. Assim, o fluxo máximo e o corte mínimo obtidos nesta rede racional aproximarão um fluxo máximo e um corte mínimo na rede original. Deixamos os detalhes desse esboço da prova do Teorema 3 como exercício para o leitor mais familiar com tais técnicas de aproximação, comuns ao curso de análise real.

Referências

[1] P.J. Cameron. *Combinatorics: topics, techniques, algorithms.* Cambridge University Press, 1994.

[2] J.H. Van Lint and R.M. Wilson. *A Course in Combinatorics.* Cambridge University Press, 2001.