Tópicos em Combinatória – 2025.1 **Avaliação Substituta**

Prof. Walner Mendonça 2 de agosto de 2025

Aluno: ______________________________ Nota:

Instruções:

- Justifique todas as suas respostas. É permitido usar qualquer resultado apresentado em sala.
- Entregar as soluções dos problemas para o email `walner+comb@mat.ufc.br` até às 20:00hs da quarta-feira dia 06/08/2025.
- A pontuação máxima é de 10 pontos.

Problema 1. (2 pontos)
Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ e seja $L \subseteq \mathbb{N}$ com $|L| = s$. Mostre que se $\mathcal{A}$ é L-intersectante, então

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}.$$

[Dica: Considere os polinômios $f_A(x) = \prod_{\ell \in L, \ell < |A|} \left(\sum_{i \in A} x_i - \ell\right)$ para cada $A \in \mathcal{A}$.]

Problema 2. (2 pontos)
Sejam $A_1, \ldots, A_m$ e $B_1, \ldots, B_m$ coleções de conjuntos tais que, para todo $i \in [m]$, temos $A_i \cap B_i = \emptyset$; e para todo $i \neq j$ temos que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ou $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ (ou ambos). Mostre que, para qualquer número real $0 < p < 1$, vale que

$$\sum_{i \in [m]} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leq 1.$$

Problema 3. (2 pontos)
Mostre que o Teorema de Andrásfai, Erdős e Sós é ótimo no seguinte sentido: existe um grafo K_{r+1}-livre com grau mínimo exatamente $(3r-4)n/(3r-1)$ que náo é r-partido.

Problema 4. (2 pontos)
Mostre que para todo $r \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe um grafo G com n vértices e grau mínimo $\delta(G) \geq \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) n$ que é livre triângulos e $\chi(G) \geq r$.

Problema 5. (2 pontos)
Demonstre o teorema de Schur: para toda r-coloração de $\mathbb{N}$, existem três elementos x, y e z da mesma cor tais que $x + y = z$.